Экономико-
математическая
библиотека

В. ГИЛЬДЕНБРАНД

ЯДРО И РАВНОВЕСИЕ В БОЛЬШОЙ ЭКОНОМИКЕ

ЭКОНОМИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

В. ГИЛЬДЕНБРАНД

ЯДРО И РАВНОВЕСИЕ В БОЛЬШОЙ ЭКОНОМИКЕ

Перевод с английского
Под редакцией и с предисловием *Н.Н. Воробьева*

МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 22.18
Г47
УДК 519.6

Core and equilibria of
a large economy
Werner Hildenbrand
Princeton University Press
Princeton, New Jersey

Гильденбранд В. Ядро и равновесие в большой экономике/Пер. с англ. Под ред. Н.Н. Воробьева. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат.лит., 1986. – 200 с. – (Серия "Экономико-математическая библиотека")

Излагаются математический аппарат и основные результаты оптимизационной теории массового поведения, формулируемой в экономической терминологии. Книга носит учебный характер и может быть использована в качестве учебного пособия для студентов и аспирантов специальностей "Прикладная математика", "Кибернетика" и др. Все необходимые математические сведения систематизированы в части I книги. Большое число задач, приводимых в конце каждого раздела, вводит читателя в курс более сложных проблем.

Для специалистов в области математической экономики, а также для студентов и аспирантов.

Ил. 19. Библиогр. 176 назв.

Г $\frac{1702070000-152}{053(02)-86}$ 36-86

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Роль и место математических методов в экономике отличаются сложностью и многоплановостью. Даже многолетние комплекты журнала по соответствующей тематике едва ли могут дать об этом исчерпывающее представление. Дело прежде всего в том, что традиционная математика возникла и длительное время развивалась под влиянием потребностей общества, сначала – межевых и строительных, затем – физики и основанных на ней отраслей техники. Общественная жизнь долгое время предъявляла к математике самые скромные требования, касавшиеся обеспечения торговых, бухгалтерских и фискальных расчетов, которые при всей их возможной запутанности не требовали средств, выходящих за пределы элементарной арифметики.

В итоге к тому времени, когда развитие экономической науки привело к необходимости использования математических методов, под рукой оказался прекрасно разработанный, концептуально упорядоченный и оснащенный разнообразными техническими приемами математический аппарат, который, однако, был предназначен для иных целей и приспособлен для решения иных задач. Попытки непосредственного применения некоторых разделов этого аппарата (например, теории дифференциальных уравнений) показали сильную ограниченность возможностей такого рода; использование отдельных более общих математических идей (например, в области оптимизационных задач) позволило существенно расширить круг применений математических методов в экономике. Однако как в том, так и в другом случаях дело ограничивалось либо чисто феноменологическим рассмотрением экономических явлений без углубления в их сущность, либо исследованием не столько экономических, сколько технико-экономических вопросов, в которых экономические категории вносились экзогенно и недостаточно отделялись от материально-технических. Это нередко давало повод к критике (не всегда, к сожалению, достаточно квалифицированной) конкретных применений математики в экономике, а подчас даже к оспариванию самой возможности таких применений за пределами тех же бухгалтерских, балансовых и др. расчетов.

Таким образом, перед математической наукой встала задача разработки адекватного (или, говоря более осторожно, достаточно адекватного) математического инструментария для описания, анализа и, наконец, прогноза экономических явлений. Проведем теперь трафаретное рассуждение: экономические явления – сложные; адекватно описывать сложные явления можно только достаточно сложными средствами; следовательно, математический аппарат, который можно с надеждой на успех использовать в экономических (а не только в технико-экономических) исследованиях, неизбежно будет сложным. Поэтому уже априори следовало предполагать, что в основе этого аппарата будут лежать весьма общие и абстрактные математические конструкции, к которым математика пришла индуктивным путем только в нашем столетии, а дальнейшее его развитие будет происходить дедуктивно и притом отнюдь не ретроспектированием предшествующей эволюции, а по некоторому существенно новому пути. Должно было появиться большое число принципиально новых конструкций, хотя, возможно, и имеющих те или иные черты формального сходства с конструкциями, возникшими в свое время в "физико-технической" математике.

Отметим два фактора, обуславливающих неизбежность трудностей в математическом обеспечении экономических представлений.

Экономические (а тем самым и математико-экономические) представления, чтобы быть в должной мере адекватными, должны отражать основные черты экономических явлений, в том числе – многосторонность интересов участников экономической жизни и те формы, в которых эта многосторонность интересов регулируется. Естественно, что для создания математических представлений об экономических явлениях необходимо иметь специальный формальный аппарат, которым бы отражалась такая множественность. Такой аппарат существует и называется теорией игр. Эта теория, начало которой следует отнести к выходу в свет основополагающей монографии Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна "Теория игр и экономическое поведение" (1944 г.; рус. пер. 1970 г.), сравнительно проста в своих элементарных понятиях и утверждениях и, напротив, требует для своего развития достаточно сложного и изощренного аппарата. Но этого мало. Сложившаяся теория игр относится к случаю экономики с малым числом участников (т.е. того случая, который иногда характеризуется как "олигополистический"), а это не соответствует реальной экономической действительности. Чтобы рассматривать вопросы большой экономики, необходимо уметь переходить от экономики с малым числом участников к экономике с большим числом участников. Но в математических представлениях очень большое – это бесконечно большое. Поэтому в нашем вопросе остается сделать еще один шаг, осуществив переход (напоминающий в математике переход от элементарной комбинаторики к функциональному анализу) от конечного числа участников экономики к бесконечному.

Из всего сказанного можно сделать вывод, опять-таки априорный, что весь экономико-математический материал, ориентированный на собственно экономические приложения, должен неизбежно оказываться педагогически неподатливым. Уже исходные его позиции требуют абстрактных формулировок, а обращение с ними – сложного (во всяком случае в концептуальном смысле) аппарата. Неудивительно поэтому, что руководств по этой тематике в настоящее время в сущности нет.

Предлагаемую советскому читателю книгу Гильденбранда можно считать первой в мировой литературе монографией, посвященной изложению основ математической экономики. При этом уже сама элементарность (в смысле простоты, первичности, нерасчлененности) рассматриваемых экономических понятий требует математической общности (в смысле универсальности и абстрактности) их трактовки. Поэтому книгу Гильденбранда отнюдь нельзя рассматривать как легкий учебник, подобно книгам, предназначенным для первоначального знакомства с другими предметами. Практически читать ее может только достаточно искушенный в абстрактных рассуждениях математик-профессионал (несмотря на то, что чуть ли не все употребляемые в книге понятия должным образом определены и разъяснены). Говоря формально, от читателя не требуется и каких-либо предварительных знаний в области математики. Однако в свете сказанного выше, весьма желательным было бы его знакомство с теорией игр и абстрактной теорией меры и интегрирования.

Книга Гильденбранда весьма информативна. В процессе ее чтения можно не только освоить непосредственно содержащийся в ней научный материал, но и почерпнуть немало поучительного для дальнейшего развития своих математико-экономических представлений. Этому в немалой степени будет способствовать продумывание формулировок приводимых по ходу дела задач, не говоря уже о попытках их решения.

Перевод книги выполнили О.Н. Воробьева (предисловие и разделы A, B, C, D. I, D. II. 1 – D.II.3 части I), Г.П. Ляпунова (раздел D. II.4 части I, гл. 3 и 4 части II) и В.Ю. Лисицын (гл. 1 и 2 части II). Необходимая работа над библиографией выполнена Г.П. Ляпуновой.

Н.Н. Воробьев

ПРЕДИСЛОВИЕ

Излагаемая в этой книге теория получила свое развитие в основном за последние десять лет и выросла непосредственно из двух основополагающих работ: Дебре и Скарфа (1963) "Одна предельная теорема о c-ядре экономики" и Аумана (1964) "Рынки с континуумом участников".

Основной проблемой этой теории является связь между двумя основными понятиями равновесия в экономике : c-ядра, отражающего кооперативную концепцию равновесия, и равновесия по Вальрасу, отражающего некооперативную концепцию.

Обе эти концепции имеют давние традиции в экономической теории. В 1874 г. Л.Вальрас дал первую формулировку общего экономического равновесия. В 1881 г. Ф.Эджворт провел анализ понятия c-ядра и его связи с равновесием по Вальрасу. В последнее время обе эти концепции равновесия возродились с развитием теории игр.

Я убежден, что основные идеи книги, относящиеся к экономической теории, можно понять на чисто интуитивном уровне без ознакомления со всей той математикой, которая излагается в части I. Вообще я склонен рекомендовать читателю при первом чтении начать непосредственно с гл. 2 и 3, которые и составляют сердцевину книги. Большинство результатов, приводимых в тексте как теоремы и предложения, сформулированы и доказаны для простых ситуаций. В основном тексте я не стремился к максимально общему изложению. Обобщения большинства результатов, а также некоторые дополнительные результаты квалифицируются как задачи и располагаются в конце каждого параграфа. Фактически для решения этих задач часто требуется более сложный математический аппарат, чем для понимания основного текста. Именно с этой точки зрения и было бы полезным тщательное изучение части I. Я опасаюсь, что начинать книгу по математической экономике с длинной главы, посвященной математическим вопросам, психологически мало оправданно: экономиста такой подход может обескуражить, а математик может придать чисто математическим аспектам слишком большое значение. Тем не менее, ориентируясь на среднего читателя, я считаю удобным собрать воедино и снабдить отчасти доказательствами математические понятия и утверждения, взятые из весьма различных областей математики.

Что касается благодарностей, то я хочу прежде всего выразить мою глубочайшую признательность Ж.Дебре, впервые познакомившему меня с предметом, который стал содержанием этой книги. Без его постоянного ободрения и конструктивной критики я скорее всего и не написал бы ее. Я использовал много его идей и указаний без явных ссылок на них в тексте.

В последние четыре года мы тесно сотрудничали с Р.Ауманом, Т.Бьюли, Б.Гродал, Я.Каннаи, Ж.-Ф.Мертенсом, Д.Шмайдлером и Ш.Замиром. Своими вкладами в работу над книгой они существенно способствовали ее формированию, и я рад поблагодарить их всех за дружеское сотрудничество.

В течение последних лет я вел преподавание по материалам этой книги в Калифорнийском университете в Беркли, в Центре по исследованию операций в эконометрике в Лувене, в Станфордском университете и в университете Бонна. Мне приятно сознавать, что я многим обязан коллегам и студентам.

Я благодарен К.Гильденбранду, который содействовал написанию приложения к гл. 2. Э.Диркер, Дж.Грин, К.Гильденбранд, А.Кирмэн, В.Нойефайнд, Д.Зондерманн и В.Трокел читали различные варианты рукописи или обширные ее разделы. Я признателен им за помощь и комментарии.

Бонн, февраль 1973 *В.Г.*

ЧАСТЬ I
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

А. ОБОЗНАЧЕНИЯ В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Понятие *множества* рассматривается здесь как первичное. Составляющие множество объекты называются *элементами* этого множества*).

$x \in S$ означает, что x является элементом множества S (x *принадлежит* S);

$x \notin S$ означает, что x не является элементом множества S;

$T \subset S$ означает, что каждый элемент множества T является также элементом множества S (T есть *подмножество* множества S, или T содержится в S);

$T = S$ означает, что $T \subset S$ и $S \subset T$ (множества S и T *равны*).

Через ϕ обозначается множество, не содержащее ни одного элемента (*пустое множество*).

Через $\{x, y, z, \ldots\}$ обозначается множество, состоящее из элементов $x, y, z, \ldots$ Порядок и повторения в списке этих элементов несущественны. Так, $\{x, y, y, x, z\} = \{z, x, y\}$.

Через N обозначается множество всех натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Через $\{x \mid p(x)\}$ обозначается множество всех тех x, для которых выполнено условие $p(x)$.

Через $\{x \in S \mid p(x)\}$ обозначается множество всех тех x, которые принадлежат S и удовлетворяют условию $p(x)$.

Объединение множеств S и T есть множество $\{x \mid x \in S$ или $x \in T\}$; оно обозначается $S \cup T$.

Пересечение множеств S и T есть множество $\{x \mid x \in S$ и $x \in T\}$; оно обозначается $S \cap T$.

Дополнение множества T в множестве S (*разностью* множеств S и T) есть множество $\{x \mid x \in S$ и $x \notin T\}$; оно обозначается $S \backslash T$.

Формальным математическим приемом установления связи объекта y с объектом x является формирование *упорядоченной пары* (x, y). Понятие упорядоченной пары здесь принимается за первичное. Две упорядоченные пары (x, y) и (x', y') считаются равными, если $x = x'$ и $y = y'$.

Декартово произведение множеств S и T есть множество, элементами которого являются упорядоченные пары (x, y), причем $x \in S$ и $y \in T$; оно обозначается $S \times T$.

Математическое описание правила постановки в соответствие одним объектам других описывается как множество таких упорядоченных пар

*) Если все множество называется пространством, то его элементы обычно называют точками (*Примеч. ред.*)

(x, y), что элемент y по этому правилу ставится в соответствие элементу x. Это приводит к следующему определению.

Отношение φ множества S в множество T есть некоторое подмножество произведения $S \times T$, т.е. множество упорядоченных пар (x, y), где $x \in S$ и $y \in T$ (рис. 1.1).

Область определения (*область задания*) отношения φ есть множество *)

$\operatorname{dom} \varphi := \{ x \in S \mid$ существует такое $y \in T$, что $(x, y) \in \varphi \}$.

Область значений отношения $x \in S$ есть множество

$\operatorname{ran} \varphi := \{ y \in T \mid$ существует такое $x \in S$, что $(x, y) \in \varphi \}$.

Образом элемента $x \in S$ в отношении φ называется множество

$\varphi(x) := \{ y \in T \mid (x, y) \in \varphi \}$.

Образом подмножества $A \subset S$ в отношении φ называется множество

$\varphi(A) := \{ y \in T \mid$ существует такое $x \in A$, что $(x, y) \in \varphi \}$.

Для любого отношения φ множества S в множество T можно определить

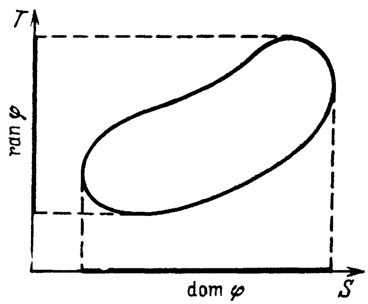

Рис. 1.1

обратное ему отношение φ^{-1} множества T в множество S следующим образом:

$\varphi^{-1} := \{ (y, x) \in T \times S \mid (x, y) \in \varphi \}$.

Пусть φ – отношение S в T, а A является подмножеством S. Отношение $\varphi \cap (A \times T)$ называется *сужением отношения* φ на A и обозначается $\varphi \mid A$.

Пусть φ – отношение S в T, а ψ – отношение T в U. Тогда отношение, описываемое множеством

$\{ (x, z) \in S \times U$ существует такое $y \in T$, что $(x, y) \in \varphi$ и $(y, z) \in \psi \}$, называется *композицией отношений* φ и ψ и обозначается $\psi \circ \varphi$.

Отношение φ множества S в множество T называется *соответствием***), если

$\operatorname{dom} \varphi = S$.

---

*) Знак $:=$ символизирует, что правая часть равенства служит определением для левой части.

**) В оригинале correspondence. (*Примеч. пер.*)

Отношение φ множества S в T называется *отображением* или *функцией*, если для каждого $x \in S$ найдется и притом единственный элемент $y \in T$, для которого $(x, y) \in \varphi$. Элемент y называется *значением* φ в точке x. Это записывается в виде $y = \varphi(x)$. Таким образом, как образ элемента x при отображении φ, т.е. множество $\{y\}$, так и значение φ в точке x, т.е. элемент y, для удобства записей обозначаются одним и тем же символом $\varphi(x)$.

Соответствие S в T может быть также определено как функция φ множества S в множество $2^T \backslash \phi$ всех непустых подмножеств множества T*). Тогда множество

$$\{(x, y) \in S \times T \mid y \in \varphi(x)\}$$

называется *графиком* функции φ.

Соответствия будут, как правило, обозначаться строчными буквами греческого алфавита, например φ, ψ. Если мы хотим подчеркнуть, что соответствие является функцией, то для его обозначения будем пользоваться строчными латинскими буквами, например f, g, h.

Для обозначения функции f, отображающей S в T, будем часто пользоваться одной из записей:

$$f\colon S \to T \quad \text{или} \quad S \xrightarrow{f} T.$$

То, что элемент y поставлен по правилу f в соответствие элементу x, будет выражаться записью $x \mapsto y = f(x)$.

Функция $x \mapsto x$ из S в S называется *тождественной* (*тождественным отображением*) и обозначается id_S.

Функция $f\colon S \to T$ называется *инъективной* (*взаимно однозначной*), если $f(x) = f(y)$ влечет $x = y$. В этом случае $f^{-1}|_{\mathrm{ran} f}$ является функцией (из $\mathrm{ran} f$ в S), $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_S$, причем $f \circ f^{-1}$ может и не совпадать с id_T.

Функция называется *сюръективной* (или *отображением на*), если $\mathrm{ran} f = T$. В этом случае f^{-1} является функцией из T в S, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_T$, а $f^{-1} \circ f$ может отличаться от id_S.

Функция f называется *биективной*, если она одновременно инъективна и сюръективна. В этом случае f^{-1} является функцией, действующей из T на S, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_S$ и $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_T$.

Функция $\{x, y\} \mapsto x$ множества $S \times T$ в S называется *проекцией* $S \times T$ на S и обозначается символом Pr_S. Ясно, что $\mathrm{Pr} S(\varphi) = \mathrm{dom}\, \varphi$ и $\mathrm{Pr}\, T(\varphi) = \mathrm{ran}\, \varphi$.

Отображение множества N натуральных чисел в множество S называется *последовательностью* точек (элементов) в S и обозначается $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$, $(x_n)_{n=1,\dots}$ или просто (x_n). Сужение $(x_n)_{n \in K}$, $K \subset \mathrm{N}$, называется *под-*

---

*) Авторитетно заявлялось (Дьедонне, 1961, с.1), что "не существует такого объекта, как "многозначная функция" (в нашей терминологии – "соответствие"), несмотря на то что многие книги утверждают обратное. Конечно, вполне законно дать определение функции, значения которой являются подмножествами некоторого заданного множества. . . " Тем не менее для многих приложений бывает весьма удобно, особенно при изучении свойств непрерывности (см. В.III), считать соответствие именно многозначным отношением, а не функцией со значениями в семействе всех подмножеств.

последовательностью последовательности $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$, если для каждого $n\in\mathrm{N}$ найдется такое $k\in K$, что $n\leqq k$.

Отображение некоторого множества I в множество 2^I всех подмножеств S иногда называют *семейством* подмножеств S. Тогда I называется *индексным множеством* этого семейства, а само семейство обозначается $\{A_i\}_{i\in S}$. Если индексное множество конечно, то семейство называется *конечным.* Если I' является подмножеством I, то сужение отображения семейства на I' называется *подсемейством* $\{A_i\}_{i\in I}$ и обозначается $\{A_i\}_{i\in I'}$. Заметим, что следует отличать семейство $\{A_i\}_{i\in I}$ от области значений соответствия $i\mapsto A_i$ для $i\in I$.

Пересечения и объединения для семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ определяются соответственно следующим образом:

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{x\in S \mid x\in A_i \text{ для всех } i\in I\},$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x\in S \mid \text{найдется такое } i\in I, \text{ что } x\in A\}.$$

Семейство $\{A_i\}_{i\in I}$ подмножеств множества S называется *покрытием* S, если

$$\bigcup_{i\in I} A_i = S.$$

Семейство $\{A_i\}_{i\in I}$ подмножеств S называется *разбиением* S, если семейство покрывает S и если $A_i\cap A_{i'}=\phi$ при $i\neq i'$.

Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ – семейство подмножеств множества S. *Декартовым произведением* множеств A_i, обозначаемым $\prod_{i\in I} A_i$, называется множество всех таких функций f из I в S, что $f(i)\in A_i$ $(i\in I)$.

Отображение R множества S в себя называется *бинарным отношением* на S. Бинарное отношение R называется:

рефлексивным, если $(x, x)\in R$ для всех $x\in S$;

иррефлексивным, если $(x, x)\notin R$ для всех $x\in S$;

полным, если $(x, y)\in R$ или $(y, x)\in R$ для всех $x, y\in S$, где $x\neq y$;

транзитивным, если из $(x, y)\in R$ и $(y, z)\in R$ следует $(x, z)\in R$;

симметричным, если из $(x, y)\in R$ следует $(y, x)\in R$;

асимметричным, если из $(x, y)\in R$ следует $(y, x)\notin R$.

Бинарное отношение, которое рефлексивно, транзитивно и симметрично, называется *эквивалентным* или *отношением эквивалентности.*

Бинарное отношение, которое рефлексивно и транзитивно, называется *отношением предпорядка.*

Пусть R – бинарное отношение на S, а M – подмножество S. Элемент $z\in M$ называется *наибольшим* в смысле отношения R в M, если $(x, z)\in R$ для всех $x\in M$, $x\neq z$.

Пусть R – бинарное отношение на множестве S, а M – подмножество S. Элемент $z\in M$ называется *максимальным* элементом в M в смысле R, если из $x\in M$ и $(z, x)\in R$ следует $(x, z)\in R$.

---

*) Полное отношение иногда называется также линейным. (*Примеч. пер.*)

Таким образом, если R асимметрично, то z является максимальным элементом в M в смысле R тогда и только тогда, когда для всех $x \in M$ будет $(z, x) \notin R$. Ясно, что наибольший элемент должен являться максимальным. Если отношение полно, то максимальный элемент будет и наибольшим.

Пусть R – некоторый предпорядок на S, а M – подмножество S. Элемент $z \in S$ называется *верхней* (*нижней*) *границей* множества M, если $(x, z) \in R$ (соответственно $(z, x) \in R$) для всех $x \in R$.

Лемма Цорна. *Пусть R – предпорядок на S. Если каждое подмножество M множества S, на котором R полно, имеет верхнюю границу (ограничено сверху), то в S существует максимальный относительно R элемент.*

Обозначим через $\mathbf{R}$ множество всех *вещественных чисел*, а символом $<$ обычный предпорядок на нем. Положим $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geqq 0\} = \mathbf{R}_+$. Число $l \in \mathbf{R}$ называется *наименьшей верхней границей* или *супремумом* подмножества $A \subset \mathbf{R}$, если l является верхней границей A, которая меньше любой другой верхней границы. Супремум множества A обозначается $\sup A$.

Число $g \in \mathbf{R}$ называется *наибольшей нижней границей* или *инфимумом* подмножества $A \subset \mathbf{R}$, если g является нижней границей A и больше любой другой нижней границы. Инфимум множества A обозначается $\inf A$.

Если супремум (инфимум) множества A принадлежит A, то он называется *максимумом* (*минимумом*) множества A и записывается $\max A$ $(\min A)$ вместо $\sup A$ $(\inf A)$.

B. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФАКТЫ ИЗ ТЕОРИИ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

B.I. Общие сведения*)

Метрическое пространство есть пара (M, d), состоящая из множества M и отображения $(x, y) \mapsto d(x, y)$ множества $M \times M$ в $\mathbf{R}_+$ и обладающая следующими свойствами:

отделимость: $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

симметрия: $d(x, y) = d(y, x)$;

неравенство треугольника: $d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y)$.

Функция d называется *метрикой* на M, а являющееся ее значением число $d(x, y)$ – *расстоянием* между x и y.

Примеры.

1. $M = \mathbf{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ – абсолютная величина разности $x - y$.

2. $M = \mathbf{R}^m$:

a) $d(x, y) = \max\limits_{i=1,\dots,m} |x^i - y^i|$;

b) $d(x, y) = \|x - y\| := \left(\sum\limits_{i=1}^{m} (x^i - y^i)^2\right)^{1/2}$ (евклидова метрика);

---

*) Этот раздел не является введением в теорию метрических пространств. Мы предполагаем, что читатель уже знаком с элементарной топологией. Единственная цель раздела состоит в том, чтобы ввести необходимые обозначения и напомнить некоторые результаты, которые будут часто применяться в дальнейшем изложении. Эти материалы можно найти в любом учебнике; см., например, Шоке (1966), Дьедонне (1960), Кэлли (1955), Ройден (1963).

c) $d(x,y) = |x - y| := \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|$.

3. Пусть M — множество всех ограниченных, заданных на S функций со значениями в $\mathbf{R}$, а для $f, g \in M$

$$d(f, g) = \sup_{s \in S} |f(s) - g(s)|^{*)}.$$

4. Пусть M — произвольное множество; $d(x, y) = 1$, если $x \neq y$, и $d(x, y) = 0$, если $x = y$.

Пусть (M, d) — метрическое пространство. Для любых $x \in M$ и $\epsilon > 0$ множество

$$B_\epsilon(x) := \{z \in M \mid d(z, x) \leqq \epsilon\}$$

называется *замкнутым шаром* с центром x и радиусом ϵ.

Множество

$$B_\epsilon^\circ(x) := \{z \in M \mid d(z, x) < \epsilon\}$$

называется *открытым шаром* с центром x и радиусом ϵ.

Диаметр подмножества A в метрическом пространстве (M, d) определяется как

$$\operatorname{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} d(x, y).$$

Расстояние между точкой x и подмножеством M в метрическом пространстве определяется как

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf_{z \in A} d(x, z).$$

Последовательность точек $(x_n)_{n=1,\dots}$ в метрическом пространстве (M, d) называется *сходящейся к* $x \in M$, если для любого $\epsilon > 0$ найдется такое целое $\bar{n}$, что $d(x, x_n) \leqq \epsilon$ для всех $n \geqq \bar{n}$. Если ясно, в смысле какой метрики имеет место сходимость, то мы будем записывать ее $x_n \underset{n}{\to} x$ или $\lim_n x_n = x$. Точка x (которая, как вытекает из определения метрики, является единственной) называется *пределом последовательности* (x_n).

Функция f, определенная на метрическом пространстве (M, d) и принимающая значения из метрического пространства (M', d'), называется *непрерывной в точке* x, если $f(x_n) \to f(x)$ как только $x_n \to x$. Функция f называется *непрерывной на множестве* M, если она непрерывна в каждой точке множества M.

Два метрических пространства (M, d) и (M', d') называются *гомеоморфными*, если существует такая однозначная функция f на M со значениями в M', что как f, так и f^{-1} непрерывны; функция f называется в этом случае *гомеоморфизмом*.

Подмножество G метрического пространства (M, d) называется *открытым*, если либо оно пусто, либо для каждой точки $x \in G$ существует открытый, содержащийся в G шар с центром в x и ненулевым радиусом.

Класс всех открытых множеств в метрическом пространстве (M, d) обладает следующими свойствами.

---

*) Такая метрика называется *равномерной*, а также *чебышевской*: Очевидно, она является развитием метрики из примера 2,а), где $S = \{1, \dots, m\}$. (*Примеч. ред.*)

(I) Любое объединение (конечное или бесконечное) открытых множеств открыто.

(II) Любое конечное пересечение открытых множеств открыто.

(III) Все пространство M, а также пустое множество открыты.

(IV) Для любых двух точек $x_1, x_2 \in M$, $x_1 \neq x_2$, существуют два таких непересекающихся открытых множества G_1 и G_2, что $x_1 \in G_1$ и $x_2 \in G_2$.

Любое семейство $\mathcal{J}$-подмножеств множества M, обладающее свойствами (I)–(III), называется *топологией* на множестве M, а пара $(M, \mathcal{J})$ – *топологическим пространством*. Элементы $\mathcal{J}$ называются *открытыми множествами*. Если топология обладает также свойством (IV), то она называется *отделяющей* (*хаусдорфовой*)*) .

Топология, порожденная метрикой d на M, называется *метрической топологией* пространства (M, d). Не всякая отделяющая топология на множестве M может быть порождена метрикой d на M. Топологическое пространство $(M, \mathcal{J})$ называется *метризуемым*, если существует такая метрика d на M, что класс открытых множеств, порожденных метрикой d, совпадает с $\mathcal{J}$.

Одна и та же топология (т.е. один и тот же набор открытых множеств) на множестве M может порождаться многими различными метриками (такие метрики называются *эквивалентными*). Поэтому метрика не является имманентным аппаратом для исследования сходимости и непрерывности.

Подмножество F топологического пространства $(M, \mathcal{J})$ называется *замкнутым*, если его дополнение $M \backslash F$ открыто.

(1) *Подмножество F метрического пространства (M, d) является замкнутым тогда и только тогда, когда предел каждой сходящейся последовательности элементов из F содержится в F.*

Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество A, называется *замыканием* A и обозначается $\bar{A}$ или $\mathrm{cl}\, A$.

Окрестностью U точки x в топологическом пространстве $(M, \mathcal{J})$ называется всякое открытое подмножество M, содержащее точку x.

Окрестностью множества A в $(M, \mathcal{J})$ называется открытое множество, содержащее A.

Переформулируем теперь на языке определения сходимости последовательностей и непрерывности функций.

(2) *Последовательность (x_n) в топологическом пространстве $(M, \mathcal{J})$ называется сходящейся к точке $x \in M$, если для каждой окрестности U точки x существует такое натуральное $\bar{n}$, что $x_n \in U$ для всех $n \geqq \bar{n}$.*

(3) *Функция f, заданная на топологическом пространстве $(M, \mathcal{J})$ и принимающая значения в топологическом пространстве $(M, \mathcal{J}')$, называется непрерывной в точке $x \in M$, если для каждой окрестности U точки $f(x)$ найдется такая окрестность V точки x, что $f(z) \in U$ для всех $z \in V$.*

(4) *Функция f, отображающая пространство $(M, \mathcal{J})$ в $(M', \mathcal{J}')$, называется непрерывной тогда и только тогда, когда множество f^{-1} (G) открыто для каждого открытого множества G в M'.*

Точка x называется *внутренней точкой* подмножества A пространства $(M, \mathcal{J})$, если A содержит некоторую окрестность точки x. Множество

*) Иногда она называется также T_2-*топологией*. (*Примеч. ред.*)

всех внутренних точек множества A называется *внутренностью* A и обозначается $\overset{\circ}{A}$, $\underline{A}$ или $\operatorname{int} A$.

Границей ∂A подмножества A пространства $(M, \mathcal{J})$ называется множество таких точек, что в каждой окрестности любой из них содержится хотя бы одна точка, принадлежащая A, и хотя бы одна, принадлежащая $M \setminus A$.

Для каждого подмножества A пространства $(M, \mathcal{J})$ имеет место $\partial A = \bar{A} \setminus \operatorname{int} A$.

Подмножество D пространства $(M, \mathcal{J})$ называется *всюду плотным* (*плотным*) в M, если $\bar{D} = M$.

Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если оно содержит счетное всюду плотное подмножество.

(5) *Метрическое пространство (M, d) называется сепарабельным, если оно обладает счетной базой открытых множеств, т.е. если существует счетное семейство $\mathcal{B}$ таких открытых множеств, что каждое открытое множество M представляет собой объединение множеств из $\mathcal{B}$.*

Топологическое пространство называется *дискретным*, если любое его подмножество открыто.

Подмножество A топологического пространства $(M, \mathcal{J})$ называется его *подпространством*, если на A задана топология $\mathcal{J}_A$, причем открытые в смысле $\mathcal{J}_A$ множества суть пересечения с множеством A открытых множеств из M.

Пусть A – подмножество метрического пространства (M, d). Ясно, что сужение d_A метрики d на $A \times A$ будет метрикой на A.

(6) *Топология на A, порожденная метрикой d_A, совпадает с топологией подпространства $\mathcal{J}_A$.*

(7) *Для того, чтобы каждое открытое (замкнутое) множество в подпространстве A пространства $(M, \mathcal{J})$ было открыто (замкнуто) в M, необходимо и достаточно, чтобы A было открыто (замкнуто) в M.*

(8) *Всякое подпространство сепарабельного метрического пространства является сепарабельным метрическим пространством.*

Пусть $(M_i, \mathcal{J}_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ – топологические пространства. *Открытым прямоугольником* в пространстве $M = \prod_{i=1}^{m} M_i$ называется всякое множество вида $\prod_{i=1}^{m} G_i$, где G_i – некоторое открытое множество в M_i.

Обозначим через $\mathcal{J}$ семейство подмножеств пространства M, которые могут быть получены как произвольные объединения открытых прямоугольников. Ясно, что такое $\mathcal{J}$ удовлетворяет аксиомам (I)–(III). Так определенное топологическое пространство $(M, \mathcal{J})$ называется *топологическим произведением пространств* $(M_i, \mathcal{J}_i)$, а $\mathcal{J}$ – *топологией произведения.*

(9) *Пусть (M_i, d_i) $(i = 1, \ldots, m)$ – метрические пространства и $M = \prod_{i=1}^{m} M_i$. Пусть, далее,*

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{m} d_i(x_i, y_i), \quad \text{где} \quad x, y \in M.$$

Тогда d является метрикой на M, и топология метрического пространства (M, d) является топологией произведения.

(10) *Конечное топологическое произведение сепарабельных метрических пространств является сепарабельным метризуемым пространством.*

(11) *Функция f, отображающая топологическое пространство T в произведение топологических пространств $M = \prod_{i=1}^{m} M_i$, непрерывна в точке x тогда и только тогда, когда все координатные функции f_i, отображающие T в M_i, непрерывны в точке x.*

(12) *Последовательность точек $(x_q^1, \ldots, x_q^m)$ в топологическом пространстве $M = \prod_{i=1}^{m} M_i$ сходится к $(x^1, \ldots, x^m) \in M$ тогда и только тогда, когда для каждого i последовательность $(x_q^i)_{q=1,\ldots}$ сходится к x^i.*

Топологическое пространство $(M, \mathcal{T})$ называется *компактным*, если из любого открытого покрытия M можно выбрать его конечное подпокрытие. О подмножестве K топологического пространства говорят, что оно компактно, если подпространство $(K, \mathcal{T}_K)$ компактно. Подмножество A топологического пространства называется *относительно компактным*, если компактно его замыкание $\bar{A}$.

Примеры. Любое конечное множество, а также любое замкнутое ограниченное подмножество в $\mathbf{R}^m$ компактны. Пополненная вещественная прямая $\bar{\mathbf{R}}$, которая получается путем присоединения к $\mathbf{R}$ двух точек $-\infty$ и $+\infty$, обладающих тем свойством, что $-\infty < x < +\infty$ для всех $x \in \mathbf{R}$ (открытое множество в $\bar{\mathbf{R}}$ можно определить как объединение открытых интервалов), также компактна.

Семейство $\mathcal{C}$ подмножеств множества M называется *конечно центрированным* (или просто *центрированным*), если каждое конечное подсемейство семейства $\mathcal{C}$ имеет непустое пересечение.

(13) *Топологическое пространство $(M, \mathcal{T})$ тогда и только тогда компактно, когда всякое центрированное семейство замкнутых подмножеств в M имеет непустое пересечение.*

(14) *Любое замкнутое подмножество F компактного пространства является его компактным подпространством.*

(15) *Метрическое пространство (M, d) компактно тогда и только тогда, когда из каждой последовательности (x_n) можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

(16) *Компактное метрическое пространство сепарабельно.*

(17) *Топологическое произведение компактных пространств компактно.*

(18) *Если f – непрерывная функция на компактном пространстве $(M, \mathcal{T})$ со значениями в топологическом пространстве $(M', \mathcal{T}')$, то $f(M)$ компактно. Далее, если пространство $(M, \mathcal{T}')$ хаусдорфово, а функция f однозначна и является отображением на M', то f является гомеоморфизмом.*

Последовательность точек $(x_n)_{n=1,\ldots}$ в метрическом пространстве (M, d) называется *последовательностью Коши* *), если для каждого $\epsilon > 0$

---

*) А также *сходящейся в себе* последовательностью. (*Примеч. пер.*)

существует такое натуральное $\bar{n}$, что для всех $p, q \geqq \bar{n}$ выполняется $d(x_p, x_q) \leqq \epsilon$. Иными словами, (x_n) является последовательностью Коши, если

$\operatorname{diam}(\{x_n, x_{n+1}, \dots\}) \underset{n}{\to} 0.$

Очевидно, любая сходящаяся последовательность в метрическом пространстве является последовательностью Коши. Заметим, что понятие "последовательность Коши" не может быть сформулировано в терминах одной только топологии пространства M. Здесь в явном виде используется метрика.

Метрическое пространство (M, d) называется *полным*, если каждая последовательность Коши точек из M сходится к некоторой точке из M.

Примеры. Пространства $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ и $\mathbf{N}$ полны. Пространства $(0, 1)$ и $\mathbf{Q}$ полными не являются. Может оказаться, что две метрики d и d' на M порождают одну и ту же топологию на M, однако пространство (M, d) полно, а (M, d') нет.

(19) *Пусть* (M, d) *– полное метрическое пространство. Для любой убывающей последовательности* (F_n) *непустых замкнутых подмножеств* M, *у которой* $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, *пересечение* $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ *содержит ровно одну точку*

(20) *Всякое компактное метрическое пространство полно.*

(21) *Всякое дискретное метрическое пространство полно.*

(22) *Всякое замкнутое подмножество полного метрического пространства является полным метрическим пространством.*

(23) *Всякое конечное произведение полных метрических пространств полно.*

Хаусдорфово топологическое пространство $(M, \mathcal{J})$ называется *локально компактным*, если каждая точка $x \in M$ имеет хотя бы одну компактную окрестность.

(24) (Александров.) *Пусть* $(M, \mathcal{J})$ *– локально компактное пространство. Тогда существует такое компактное пространство* $(M', \mathcal{J}')$, *что* M *гомеоморфно подпространству пространства* M', *дополнение которого состоит ровно из одной точки. Пространство* M' *единственно с точностью до гомеоморфизма.*

Пространство M' называется *компактным расширением по Александрову* (или *одноточечной компактификацией*) и обозначается $M \cup \{\infty\}$.

(25) *Если* (M, d) *– сепарабельное и локально компактное метрическое пространство, то компактное расширение по Александрову метризуемо*

B. II. Пространство подмножеств метрического пространства

Пусть (M, d) – метрическое пространство, а (F_n) – последовательность подмножеств множества M.

Топологический нижний предел. Обозначим $\operatorname{Li}(F_n)$ подмножество M, обладающее следующим свойством: $x \in \operatorname{Li}(F_n)$ тогда и только тогда, когда для каждой окрестности V точки x найдется такое натуральное $\bar{n}$, что $V \cap F_n \neq \phi$ для всех $n \geqq \bar{n}$ *).

*) Li и Ls – обозначения, составленные из начальных букв слов limes infimum (нижний предел) limes supremum (верхний предел). (*Примеч. ред.*)

Т о п о л о г и ч е с к и й в е р х н и й п р е д е л. Обозначим $\mathrm{Ls}(F_n)$ подмножество M, обладающее следующим свойством: $x \in \mathrm{Ls}(F_n)$ тогда и только тогда, когда для каждой окрестности V точки x существуют бесконечно много номеров $\bar{n}$, для которых $V \cap F_n \neq \phi$ для всех $n \geqq \bar{n}$.

Нетрудно проверить, что:

для каждой последовательности (F_n) множества $\mathrm{Li}(F_n)$ и $\mathrm{Ls}(F_n)$ замкнуты (возможно, пусты), и $\mathrm{Li}(F_n) \subset \mathrm{Ls}(F_n)$;

$x \in \mathrm{Li}(F_n)$ тогда и только тогда, когда существуют такая подпоследо- $\bar{n}$ и такая последовательность (x_n), где $x_n \in F_n$ $(n > \bar{n})$, что $\lim\limits_{n} x_{n_q} = x$;

$x \in \mathrm{Ls}(F_n)$ тогда и только тогда, когда существуют такая подпоследовательность (F_{n_q}) и для каждого q такой элемент $x_{n_q} \in F_{n_q}$, что $\lim\limits_{q} x_{n_q} = x$.

Говорят, что подмножество F множества M является *замкнутым пределом* последовательности (F_n), если $\mathrm{Li}(F_n) = F = \mathrm{Ls}(F_n)$.

У т в е р ж д е н и е 1. *Пусть (M, d) – сепарабельное метрическое пространство. Из каждой последовательности (F_n) подмножеств M можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду того что $\mathrm{Li}(F_n) \subset \mathrm{Ls}(F_n)$, последовательность (F_n) сходится тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ls}(F_n) \subset \mathrm{Li}(F_n)$. Из сепарабельности метрического пространства (M, d) следует на основании (5), что оно имеет счетную базу $\mathscr{B}$ открытых множеств. В этом случае, согласно определениям нижнего и верхнего пределов, последовательность (F_n) сходится тогда и только тогда, когда для каждого открытого множества $G \in \mathscr{B}$, для которого $G \cap F_n \neq \phi$ при произвольно больших значениях n, найдется такое натуральное $\bar{n}$, что $G \cap F_n \neq \phi$ для всех $n \geqq \bar{n}$. Рассмотрим теперь для каждого $G \in \mathscr{B}$ последовательность $(\lambda_n^G)_{n=1,\dots}$, заданную следующим образом:

$$\lambda_n^G := \begin{cases} 1, & \text{если} \quad G \cap F_n \neq \phi, \\ 0, & \text{если} \quad G \cap F_n = \phi. \end{cases}$$

Так как $\mathscr{B}$ является счетной базой, найдется такая последовательность $(n_q)_{q=1,\dots}$, что для любого $G \in \mathscr{B}$ подпоследовательность $(\lambda_{n_q}^G)_{q=1,\dots}$ сходится. Поэтому будет сходиться соответствующая ей подпоследовательность $(F_{n_q})_{q=1,\dots}$, что и требовалось доказать.

Обозначим через $\mathscr{F}(M)$ или $\mathscr{F}$ семейство всех замкнутых подмножеств метрического пространства (M, d). Покажем, что для сепарабельных и локально компактных метрических пространств понятие "замкнутая сходимость" является топологическим понятием.

Для любых двух непустых подмножеств E и F метрического пространства (M, d) *расстояние по Хаусдорфу* $\delta(E, F)$ (относительно метрики d на пространстве M) задается следующим образом:

$$\delta(E, F) := \inf\{\epsilon \in (0, \infty] \mid E \subset B_\epsilon(F) \quad \text{и} \quad F \subset B_\epsilon(E)\},$$

где $B_\epsilon(E)$ обозначает ϵ-окрестность множества E, т.е.

$$B_\epsilon(E) := \{x \in M \mid \mathrm{dist}(x, E) \leqq \epsilon\}.$$

Обозначим через $\mathcal{F}_0$ множество всех непустых замкнутых подмножеств в (M, d).

Утверждение 2. *Построенная выше функция* $\delta\colon\ \mathcal{F}_0 \times \mathcal{F}_0 \to [0, \infty)$ *обладает следующими свойствами*:

(I) $\delta(E, F) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $E = F$;

(II) $\delta(E, F) = \delta(F, E)$;

(III) $\delta(E, F) \leqq \delta(E, D) + \delta(D, F)$.

Доказательство. (I) Так как E и F являются замкнутыми подмножествами M, из $\delta(E, F) = 0$ следует, что $E \subset F$ и $F \subset E$, т.е. $E = F$.

Свойство (II) тривиально.

(III) Пусть

$$\rho(E, F) := \sup_{x \in E} \operatorname{dist}(x, F).$$

Нетрудно проверить, что

$$\delta(E, F) = \max\{\rho(E, F), \rho(F, E)\}.$$

Если $E \subset B_\epsilon(D)$ и $D \subset B_\eta(F)$, то из неравенства треугольника следует, что $E \subset B_{\epsilon+\eta}(F)$. Таким образом, получаем

$$\rho(E, F) \leqq \rho(E, D) + \rho(D, F).$$

Поэтому

$$\delta(E, F) = \max\{\rho(E, F), \rho(F, E)\} \leqq$$

$$\leqq \max\{\rho(E, D) + \rho(D, F), \rho(F, D) + \rho(D, E)\} \leqq$$

$$\leqq \max\{\delta(E, D) + \delta(D, F), \delta(F, D) + \delta(D, E)\} = \delta(E, D) + \delta(D, F).$$

Заметим, что топология на $\mathcal{F}_0$, порожденная хаусдорфовой метрикой δ, не задается одной только топологией исходного метрического пространства (M, d). Две метрики d и d' на M, которые задают одну и ту же топологию на $\mathcal{F}_0$, в результате введения метрики по Хаусдорфу могут привести к различным топологиям на пространстве $\mathcal{F}_0$.

Пусть, например, $M = \mathbf{R}_+$,

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right|, \qquad d'(x, y) = \min\{1, |x - y|\}.$$

Метрики d и d' задают на $\mathbf{R}_+$ одну и ту же топологию, однако топологии, порожденные соответствующими хаусдорфовыми метриками на $\mathcal{F}_0(\mathbf{R}_+)$, различны. Например, множество $\mathbf{N}$ целых положительных чисел принадлежит замыканию множества всех конечных подмножеств $\mathbf{N}$ в первом случае и не принадлежит во втором.

Однако если две метрики d и d' порождают одну и ту же равномерность (т.е. если каждая функция, равномерно непрерывная в смысле метрики d, будет также равномерно непрерывной и в смысле метрики d', и наоборот), то они приводят к одной и той же топологии, порожденной метрикой Хаусдорфа на $\mathcal{F}_0$.

Теорема 1. *Пусть* (M, d) *– компактное метрическое пространство. Тогда множество* $\mathcal{F}_0$ *непустых замкнутых подмножеств из* M *с заданной на нем метрикой Хаусдорфа* δ *представляет собой компактное метрическое пространство. Последовательность* (F_n) *сходится к* F в $(\mathcal{F}_0, \delta)$ *тогда и* *только тогда, когда* $\mathrm{Li}(F_n) = F = \mathrm{Ls}(F_n)$. *База открытых множеств пространства* $(\mathscr{F}_0, \delta)$ *задается множествами вида*

$$[G\colon G_1, \ldots, G_k] := \{F \in \mathscr{F}_0 \mid F \subset G \text{ и } F \cap G_i \neq \phi, \quad i = 1, \ldots, k\},$$

где $G, G_1, \ldots, G_k$ *– открытые множества в* M.

Доказательство. Из утверждения 2 следует, что $(\mathscr{F}_0, \delta)$ является метрическим пространством. Пусть последовательность (F_n) сходится к F в $(\mathscr{F}_0, \delta)$. Тогда очевидно, что $F \subset \mathrm{Li}(F_n)$ и $\mathrm{Ls}(F_n) \subset F$. Следовательно, $\mathrm{Li}(F_n) = F = \mathrm{Ls}(F_n)$. Обратно, пусть F – замкнутый предел последовательности (F_n) в $\mathscr{F}_0$. Из компактности M следует, что $F \neq \phi$ и, значит, $F \in \mathscr{F}_0$. Нам остается показать, что для всякого $\epsilon > 0$ и достаточно больших n справедливы включения $F_n \subset B_\epsilon(F)$ и $F \subset B_\epsilon(F_n)$. Если бы первое включение было неверным, то мы пришли бы к противоречию с $\mathrm{Ls}(F_n) = F$; если бы неверным было второе включение, то мы пришли бы к противоречию с $F = \mathrm{Li}(F_n)$.

Из утверждения 1 и (15) теперь следует, что $(\mathscr{F}_0, \delta)$ является компактным метрическим пространством.

Покажем, что класс подмножеств в $\mathscr{F}_0$ вида $[G\colon G_1, \ldots, G_k]$ образует базу открытых множеств. Для того чтобы показать, что множества $[G\colon G_1, \ldots, G_k]$ открыты, достаточно рассмотреть множества вида $[G\colon G_1]$. Пусть $F \in [G\colon G_1]$, т.е. $F \subset G$ и $F \cap G_1 \neq \phi$. Тогда существуют такие $\epsilon > 0$ и $x \in F \cap G_1$, что $B_\epsilon(F) \subset G$ и $B_\epsilon(x) \subset G_1$. Теперь нетрудно убедиться, что шар в $(\mathscr{F}_0, \delta)$ с центром F и радиусом $\epsilon/2$ содержится в $[G\colon G_1]$. Таким образом, множество $[G\colon G_1]$ открыто. Остается показать, что для каждого $F \in \mathscr{F}_0$ и каждого шара в $(\mathscr{F}_0, \delta)$ с центром F и радиусом $\epsilon > 0$ существует множество вида $[G\colon G_1, \ldots, G_k]$, содержащее F и содержащееся в этом шаре. Положим $G = B_\epsilon(F)$. Ввиду компактности F существует конечное открытое покрытие $\{G_1, \ldots, G_k\}$ множества F, причем $\mathrm{diam}\, G_i < \epsilon$. Очевидно, что из $F \in [G\colon G_1, \ldots, G_k]$ и $F' \in [G\colon G_1, \ldots, G_k]$ следует $\delta(F, F') \leqq \epsilon$.

Топология замкнутой сходимости. Пусть $(M, \mathscr{J})$ – топологическое пространство. Рассмотрим подмножества пространства $\mathscr{F}(M)$, имеющие вид

$$[K, \mathscr{G}] := \{F \in \mathscr{F}(M) \mid F \cap \phi K \phi \text{ и } F \cap G = \phi, G = \mathscr{G}\},$$

где K – компактное подмножество в M, а $\mathscr{G}$ – конечное семейство непустых открытых подмножеств в M.

Конечное пересечение множеств такого вида является множеством этого же вида. Поэтому класс всех таких множеств представляет собой базу некоторой топологии. Она называется *топологией* $\mathscr{J}_c$ *замкнутой сходимости* на $\mathscr{F}$. Топология $\mathscr{J}_c$ замкнутой сходимости является хаусдорфовой тогда (и только тогда), когда пространство $(M, \mathscr{J})$ локально компактно. Действительно, пусть $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ и $F_1 \neq F_2$. Возьмем $x \in F_1$ и $x \notin F_2$. Пусть K – компактная окрестность x, причем $K \cap F_2 = \phi$. Тогда множество $[K, \{M\}]$ является окрестностью F_2, а множество $[\phi, \{\mathring{K}\}]$ – окрестностью F_1. Очевидно, что пересечение этих окрестностей пусто (обратное утверждение, касающееся "только тогда", в дальнейшем нам не понадобится).

Т е о р е м а 2. *Пусть (M, d) — локально компактное сепарабельное метрическое пространство. Тогда множество $\mathcal{F}$ всех замкнутых подмножеств в M с заданной на нем топологией $\mathcal{J}_c$ замкнутой сходимости является компактным метризуемым пространством. Последовательность (F_n) сходится к F в $(\mathcal{F}, \mathcal{J}_c)$ тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Li}(F_n) = F = \mathrm{Ls}(F_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $M \cup \{\infty\}$ — компактификация по Александрову (24) локально компактного пространства (M, d). Так как пространство (M, d) сепарабельно, расширение $M \cup \{\infty\}$ метризуемо (25). Обозначим через ρ метрику на $M \cup \{\infty\}$. К компактным метрическим пространствам применима теорема 1. Обозначим через δ хаусдорфово расстояние на $\mathcal{F}_0(M \cup \{\infty\})$.

Каждому замкнутому подмножеству F из M поставим в соответствие множество $F \cup \{\infty\}$, которое будет замкнутым подмножеством $M \cup \{\infty\}$. Этим мы установили взаимно однозначное соответствие между множеством всех замкнутых подмножеств в M и множеством замкнутых подмножеств в $M \cup \{\infty\}$, которые содержат точку $\{\infty\}$. Из теоремы 1 и (14) следует, что это множество является компактным подпространством в $(\mathcal{F}_0(M \cup \{\infty\}, \delta))$. Поэтому в индуцированной топологии $\mathcal{J}_\delta$ множество $\mathcal{F}$ замкнутых подмножеств в M является компактным метрическим пространством. Так как дополнение компактного множества K в M открыто в $M \cup \{\infty\}$ и так как открытое множество в M открыто и в $M \cup \{\infty\}$, топология $\mathcal{J}_c$ замкнутой сходимости в M грубее, чем индуцированная топология $\mathcal{J}_\delta$. Поэтому, согласно (18), в том случае, когда топология $\mathcal{J}_c$ хаусдорфова, обе эти топологии совпадают на $\mathcal{F}$, а пространство $(\mathcal{F}, \mathcal{J}_\delta)$ компактно. Метрика d на $\mathcal{F}$ в топологии $\mathcal{J}_c$ задается, согласно (6), формулой

$$d(F, F') := \delta(F \cup \{\infty\}, \quad F' \cup \{\infty\}).$$

Если последовательность (F_n) сходится к F в $(\mathcal{F}(M), \mathcal{J}_c)$, то последовательность $(F_n \cup \{\infty\})$ сходится к $F \cup \{\infty\}$ в $(\mathcal{F}(M \cup \{\infty\}))$. Поэтому по теореме 1 $F \cup \{\infty\}$ является замкнутым пределом последовательности $(F_n \cup \{\infty\})$ в $M \cup \{\infty\}$, откуда следует, что F является замкнутым пределом последовательности (F_n) в M. Обратное утверждение доказывается аналогично. Теорема доказана.

Задачи

З а д а ч а 1. Пусть $(M, \mathcal{J})$ — некоторое топологическое пространство. Для обобщенных последовательностей (сетей) $(F_i)_{i \in I}$, состоящих из подмножеств множества M, можно определить $\mathrm{Li}(F_i)$ и $\mathrm{Ls}(F_i)$ и задать понятие сходимости по аналогии с соответствующими понятиями для последовательностей. Показать, что каждая обобщенная последовательность подмножеств в M содержит сходящуюся обобщенную подпоследовательность.

У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой Тихонова.

З а д а ч а 2. Пусть $(M, \mathcal{J})$ — локально компактное пространство. Доказать, что обобщенная последовательность $(F_i)_{i \in I}$ в $\mathcal{F}(M)$ сходится в смысле топологии замкнутой сходимости тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ls}(F_i) \subset \mathrm{Li}(F_i)$. Показать, что предположение о локальной компактности является здесь необходимым, т.е. для нелокально компактных пространств замкнутая сходимость не определяет топологии.

Задача 3. Пусть $(M, \mathcal{J})$ — локально компактное пространство. Показать, что множество $\mathcal{F}$ замкнутых подмножеств в M компактно в смысле топологии $\mathcal{J}_c$ замкнутой сходимости.

Указание. Рассмотреть покрытия множеств вида $\{F \in \mathcal{F} \mid F \cap \cap K = \phi\}$ и $\{F \in \mathcal{F} \mid F \cap G \neq \phi\}$ и применить теорему Александрова.

Задача 4. Было показано, что для локально компактного пространства $(M, \mathcal{J})$ пространство $(\mathcal{F}, \mathcal{J}_c)$ хаусдорфово. Доказать обратное утверждение, т.е. доказать, что если пространство $(\mathcal{F}, \mathcal{J}_c)$ хаусдорфово, то хаусдорфово пространство $(M, \mathcal{J})$ локально компактно.

Задача 5. Пусть (M, d) — локально компактное сепарабельное метрическое пространство. Показать (не пользуясь при этом, как в теореме 2, понятием хаусдорфовой метрики), что пространство $(\mathcal{F}, \mathcal{J}_c)$ метризуемо.

Указание. Воспользоваться теоремой Урысона и показать, что $(\mathcal{F}, \mathcal{J}_c)$ имеет счетную базу открытых множеств. Воспользоваться этими множествами для базы $\mathcal{J}_c$. Показать, что из метризуемости пространства $(\mathcal{F}, \mathcal{J}_c)$ следует сепарабельность локально компактного пространства (M, d).

Литературные ссылки

Замкнутая сходимость: Хаусдорф (1962), с. 168 – 172; Куратовский (1958), с. 241–250. Расстояние по Хаусдорфу: Хаусдорф (1962), с. 166–167. Топология замкнутой сходимости: Уотсон (1953), см. также Шоке (1947), Мровка (1958), Фелл (1962), Флаксмайер (1964), Эффрос (1965) и др.

В.III. Непрерывные соответствия

В этом разделе мы рассмотрим некоторые свойства непрерывности отображения метрического пространства S в метрическое пространство T*). Для этого представляется естественным рассматривать отображение φ как функцию, заданную на S со значениями в $2^T \setminus \phi$. Тогда, задавая на множестве $2^T \setminus \phi$ различные топологии, связанные, разумеется, с топологией на T, мы будем получать различные концепции непрерывности отображения φ. Однако в большинстве приложений, например при мотивации приводимой далее теоремы 3, наиболее удобным оказывается рассматривать φ как точечно-множественное соответствие и, следовательно, определять понятие непрерывности, используя непосредственно топологию на T. Для выработки понятий непрерывности обе представленные здесь точки зрения оказываются эквивалентными (см. задачи 4 и 5).

Полунепрерывные сверху соответствия

Определение 1. Отношение φ метрического пространства S в метрическое пространство T называется *полунепрерывным сверху* (*п.н.св.*)

*) Ограничение метрическими пространствами не является существенным. Оно, однако, оставляет достаточную общность для приложений, которые будут рассмотрены в следующих главах.

в точке $\bar{x} \in S$, если $\varphi(\bar{x}) \neq \phi$ и для всякой окрестности U множества $\varphi(\bar{x})$ найдется такая окрестность V точки x, что $\varphi(z) \subset U$ для всех $z \in V$. Отношение называется п.н.св., если оно п.н.св. для всех $x \in S$.

Примеры.

1. Отображение f: $S \to T$ п.н.св. в точке $x \in S$ тогда и только тогда, когда оно в x непрерывно.

2. Отображение f: $S \to T$ отображает замкнутые множества в замкнутые тогда и только тогда, когда отношение

$$y \mapsto f^{-1}(y) = \{x \in S \mid f(x) = y\}$$

п.н.св.

3. Пусть f: $S \to \mathbf{R}$. Соответствие $x \mapsto \{y \in \mathbf{R} \mid y \leq f(x)\}$ п.н.св. тогда и только тогда, когда функция f является полунепрерывной сверху*).

4. Если отношение φ из S в T является п.н.св. в точке x, то отношение $x \mapsto \overline{\varphi(x)}$ также п.н.св. в точке x. Обратное неверно.

5. Пусть отношения φ_i из S в $T (i = 1, \ldots, n)$ п.н.св. в точке x. Тогда отношение $x \mapsto \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(x)$ п.н.св. в точке x.

Пусть $K \subset G \subset T$, где K компактно, а G открыто в T. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что $B_\delta(K) \subset G$. Следовательно, если отношение φ из S в T таково, что $\varphi(\bar{x})$ непусто и компактно, то φ п.н.св. в точке $\bar{x}$ тогда и только тогда, когда для каждого $\delta > 0$ найдется такая окрестность V точки $\bar{x}$, что для всех $z \in V$ имеет место $\varphi(z) \subseteq B_\delta(\varphi(\bar{x}))$.

Утверждение 1 (характеристические свойства п.н.св.). *Пусть φ — соответствие из S в T. Эквивалентны следующие суждения*:

(I) *φ является п.н.св.*;

(II) *множество $\{x \in S \mid \varphi(x) \subset G\}$ открыто для любого открытого множества G в T;*

(III) *множество $\{x \in S \mid \varphi(x) \subset F\}$ замкнуто для любого замкнутого множества F в T.*

Множество

$$\varphi^{-*}(M) := \{x \in S \mid \varphi(x) \subset M\}$$

будем называть *сильным прообразом множества M,* а множество

$$\varphi^{-1}(M) := \{x \in S \mid \varphi(x) \cap M \neq \phi\}$$

слабым прообразом M.

Доказательство. (I) $\Rightarrow$ (II). Пусть множество G открыто в T и $x \in \varphi^{-*}(G)$. Покажем, что x является внутренней точкой $\varphi^{-*}(G)$. Так как G — окрестность точки $\varphi(x)$, из (I) следует, что существует такая окрестность V точки x, что $\varphi(V) \subset G$, т.е. $V \subset \varphi^{-*}(G)$.

(II) $\Rightarrow$ (I). Пусть U — окрестность точки $\varphi(x)$. Существует такое множество G, что $\varphi(x) \subset G \subset U$. Согласно (II), множество $\varphi^{-*}(G)$ открыто, и, так как $x \in \varphi^{-*}(G)$, можно выбрать $V = \varphi^{-*}(G)$.

---

*) Если f — однозначная функция со значениями в $\mathbf{R}$, то она будет п.н.св. в $x \in S$, если для любого $\lambda > f(x)$ существует такая окрестность U точки x, что $\lambda > f(z)$ для любого $z \in U$.

(II) $\Leftrightarrow$ (III). Действительно, для каждого $A \subset T$

$$S \setminus \varphi^{-1}(A) = \varphi^{-*}(T \setminus A).$$

С л е д с т в и е. *Пусть соответствия φ из S в T и ψ из T в U являются п.н.св. Тогда композиция $\psi \circ \varphi$ из S в U также должна быть п.н.св.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $(\psi \circ \varphi)^{-1}(F) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(F))$, сформулированное следствие вытекает из утверждения 1 и (III).

О п р е д е л е н и е 2. Отношение φ из S в T называется *замкнутым в точке* $\bar{x}$, если для каждой последовательности точек (x_n, y_n) из $S \times T$, для которой $(x_n, y_n) \to (\bar{x}; y)$ и $y_n \in \varphi(x_n)$ $(n = 1, \ldots)$, имеет место $y \in \in \varphi(\bar{x})$.

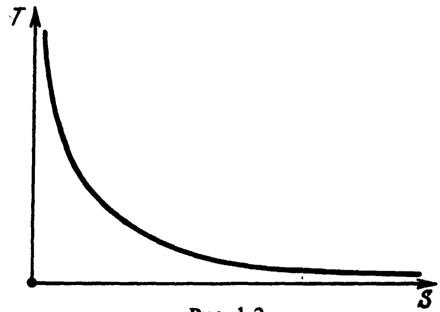

Рис. 1.2

Отношение называется *замкнутым*, если оно замкнуто в каждой точке $x \in S$.

Если соответствие замкнуто в точке $\bar{x}$, то оно не обязательно п.н.св. в этой точке (даже если множество $\varphi(\bar{x})$ компактно).

П р и м е р.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \{0\ ,\ 1/x\}, & x > 0, \\ \{0\}, & x = 0 \end{cases}$$

(рис. 1.2).

Если T компактно, то отношение φ из S в T, замкнутое в $\bar{x}$, будет также п.н.св. в $\bar{x}$. В частности, если пространство T компактно, то соответствие φ будет замкнутым тогда и только тогда, когда φ п.н.св.

В более общем случае мы имеем следующий результат.

У т в е р ж д е н и е 2. *Пусть φ и ψ – соответствия из S в T и пусть точка $\bar{x} \in S$ такова, что $\varphi(\bar{x}) \cap \psi(\bar{x}) \neq \phi$.*

(a) *Если φ и ψ п.н.св. в точке $\bar{x}$ и имеют замкнутые множества значений, то соотношение $x \mapsto \varphi(x) \cap \psi(x)$ также п.н.св. в точке $\bar{x}$.*

(b) *Если φ замкнуто в точке $\bar{x}$, ψ п.н.св. в $\bar{x}$, а $\psi(\bar{x})$ компактно, то отношение $x \mapsto \varphi(x) \cap \psi(x)$ п.н.св. в точке $\bar{x}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G – открытая окрестность $\varphi(\bar{x}) \cap \psi(\bar{x})$. Положим $F = \psi(\bar{x}) \cap (T \setminus G)$.

(a) Множество F замкнуто и $\varphi(\bar{x}) \cap F = \phi$. Существуют такие открытые окрестности G' и G'' соответственно множеств $\varphi(\bar{x})$ и F, что $G' \cap G'' = \phi$. Так как φ п.н.св. в точке $\bar{x}$, то существует такая окрестность V' точки $\bar{x}$, что $\varphi(V') \subset G$ и, значит, $\varphi(V') \subset T \setminus G''$. Поскольку $G' \cup G''$ является окрестностью $\psi(\bar{x})$ и ψ п.н.св. в точке $\bar{x}$, то существует такая окрестность V'' точки $\bar{x}$, что $\psi(V'') \subset G' \cup G''$. Следовательно, для каждого $z \in V' \cap \cap V''$ мы имеем

$$\varphi(Z) \cap \psi(Z) = (T \setminus G'') \cap (G' \cup G'') \subset G.$$

(b) Так как φ замкнуто в точке $\bar{x}$, то для всякого $y \notin \varphi(\bar{x})$ существует такая окрестность V точки $\bar{x}$ и такая окрестность U точки y, что $\varphi(V) \subset \subset T \setminus U$. Поскольку F компактно и $F \cap \varphi(\bar{x}) = \phi$, то существуют такие окрестности V' и G'' соответственно точки $\bar{x}$ и множества F, что $\varphi(V') \subset \subset T \setminus G''$. Доказательство можно закончить, как в случае (a).

Утверждение 3. *Пусть соответствие φ из S в T имеет компактные значения и п.н.св. Тогда образ $\varphi(K)$ компактного множества K-компактен.*

Доказательство. Пусть $\{G_i\}_{i \in I}$ – открытое покрытие $\varphi(K)$. Так как для каждого $x \in K$ множество $\varphi(x)$ компактно, то существует такое конечное множество $I_x \subset I$, что

$$\varphi(x) \subset \bigcup_{i \in I_x} G_i = G_x .$$

Согласно утверждению 1, множество $\varphi^{-*}(G_x)$ открыто; тогда очевидно, что $x \in \varphi^{-*}(G_x)$. Следовательно, семейство $\{\varphi^{-*}(G_x)\}_{x \in K}$ является открытым покрытием множества K. Так как K по предположению компактно, существуют такие $x_1, \dots, x_m \in K$, что

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{m} \varphi^{-*}(G_{x_k}).$$

Очевидно, что $\{G_i\}_{i \in I_{x_k}}$ $(k = 1, \dots, m)$ будет конечным подпокрытием $\{G_i\}_{i \in I}$.

Теорема 1 (характеризующая п.н.св. через последовательности). *Компактнозначное отношение φ множества S в T является п.н.св. в x тогда и только тогда, когда $\varphi(x) \neq \phi$ и для каждой последовательности (x_n), сходящейся к x, и для каждой такой последовательности (y_n), что $y_n \in \varphi(x_n)$, существует сходящаяся подпоследовательность последовательности (y_n), предел которой принадлежит $\varphi(x)$.*

Доказательство. Пусть φ п.н.св. в точке x. Множество $K = \{x, x_1, x_2, \dots\}$ компактно и сужение φ на K п.н.св. Тогда, согласно утверждению 3, множество $\varphi(K)$ компактно и, значит, последовательность (y_n) содержит сходящуюся подпоследовательность, например $(y_{n_q}) \underset{q}{\to} y$.

Предположим, что $y \notin \varphi(x)$. Тогда существует замкнутая окрестность $\bar{U}$ множества $\varphi(x)$, не содержащая y. Но для достаточно больших n мы имеем $\varphi(x_n) \subset \bar{U}$, так как φ п.н.св. в точке x. Таким образом, для достаточно больших n $y_n \in \bar{U}$, а значит, $y \in \bar{U}$, и мы пришли к противоречию.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что φ не п.н.св. в точке x, т.е. существует такая открытая окрестность U множества $\varphi(x)$, что каждая окрестность V точки x содержит точку z, для которой $\bar{\varphi}(z) \not\subset U$. Следовательно, найдется последовательность (x_n), сходящаяся к x, и $y_n \in \varphi(x_n)$. По предположению существует сходящаяся подпоследовательность (y_n) и $\lim\limits_q y_{n_q} \in \varphi(x)$. Однако из $y_n \notin U$ для всех n следует $\lim\limits_q y_{n_q} \notin U$, и потому $\lim\limits_q y_{n_q} \notin \varphi(x)$, что и требовалось.

Для облегчения дальнейших ссылок сформулируем несколько непосредственных следствий из теоремы 1.

Утверждение 4. *Пусть отношения φ_i множества S в T_i $(i = 1, \ldots, k)$ компактнозначны и п.н.св. в точке x. Тогда произведение отношений*

$$x \mapsto \prod_{i=1}^{k} \varphi_i(x)$$

из S в $\prod\limits_{i=1}^{k} T_i$ компактнозначно и п.н.св. в точке x.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из теоремы 1, (13) и (19) из В.1.

Утверждение 5. *Пусть E – линейное метрическое пространство, а отношения φ_i множества S в E $(i = 1, \ldots, k)$ компактнозначны и п.н.св. в точке x. Тогда отношение*

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x)$$

из S в E также компактнозначно и п.н.св. в точке x.

Доказательство. Пусть последовательность (x_n) сходится к x и

$$y_n \in \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x_n).$$

Тогда $y_n = \sum\limits_{i=1}^{k} y_n^i$, где $y_n^i \in \varphi_i(x_n)$. По теореме 1 в каждой последовательности (y_n^i) $(i = 1, \ldots, n)$ найдется сходящаяся подпоследовательность, предел которой содержится в $\varphi_i(x)$. Следовательно, существует такая сходящаяся подпоследовательность (y_{n_q}) последовательности (y_n), что $y_{n_q}^i \to y^i \in \varphi_i(x)$. Таким образом,

$$\lim_q y_{n_q} = \sum_{i=1}^{k} y^i \in \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x).$$

Поэтому из теоремы 1 следует утверждение 5.

Утверждение 6. *Пусть отношение φ множества S в $\mathbf{R}^m$ компактнозначно и п.н.св. в точке x. Тогда соответствие $x \mapsto \operatorname{conv} \varphi(x)$, где $\operatorname{conv} \varphi$ – выпуклая оболочка φ, компактнозначно и п.н.св. в x.*

Доказательство. Пусть последовательность (x_n) сходится к x и $y_n \in \operatorname{conv} \varphi(x_n)$. Мы можем написать

$$y_n = \sum_{i=0}^{m} \lambda_n^i z_n^i \quad ,$$

где

$$z_n^i \in \varphi(x_n), \quad \sum_{i=0}^{m} \lambda_n^i = 1$$

и $\lambda_n^i \geqq 0$ (см. С.I, (3)). По теореме 1 существует сходящаяся подпоследовательность последовательности $(z_n^i)_n$ $(i = 0, \ldots, m)$, предел которой принадлежит $\varphi(x)$. Значит, существует такая сходящаяся подпоследовательность (y_{n_q}) последовательности (y_n), что подпоследовательности $(z_{n_q}^i)_q$ и $(\lambda_{n_q}^i)_q$ $(i = 0, \ldots, m)$ сходятся. Положим $z_{n_q}^i \to z^i$ и $\lambda_{n_q}^i \to \lambda^i$. Ясно, что $\sum_{i=1}^{m} \lambda^i = 1$ и $\lambda^i \geqq 0$. Следовательно,

$$\lim y_{n_q} = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i z^i \in \operatorname{conv} \varphi(x),$$

что и требовалось.

Отношения, полунепрерывные снизу

Определение 3. Отношение φ из метрического пространства S в метрическое пространство T называется *полунепрерывным снизу* (*п.н.сн.*) *в точке* $x \in S$, если $\varphi(x) \neq \phi$ и если для каждого открытого множества G в T, для которого $\varphi(x) \cap G \neq \phi$, существует такая окрестность V точки x, что $\varphi(z) \cap G \neq \phi$ для всех $z \in V$.

Отношение φ называется *п.н.сн.*, если оно п.н.сн. в каждой точке $x \in S$.

Примеры.

1. Отображение $f\colon S \to T$ п.н.сн. в точке x тогда и только тогда, когда оно непрерывно в x.

2. Отображение $f\colon S \to T$ отображает открытые множества в открытые тогда и только тогда, когда отношение

$$y \mapsto f^{-1}(y) = \{x \in S \mid f(x) = y\}$$

является п.н.сн.

3. Пусть $f\colon S \to \mathbf{R}$. Соответствие $x \mapsto \{y \in \mathbf{R} \mid y \leqq f(x)\}$ п.н.сн. тогда и только тогда, когда вещественная функция f полунепрерывна снизу*).

4. Отношение φ из S в T п.н.сн. в x тогда и только тогда, когда отношение $x \mapsto \overline{\varphi(x)}$ п.н.сн. в x.

5. Если отношения φ_i из S в $T (i = 1, \ldots, n)$ п.н.сн. в точке x, то отношение $x \mapsto \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(x)$ п.н.сн. в x.

Утверждение 7 (характеризация п.н.сн.). *Пусть φ — соответствие из S в T. Следующие утверждения эквивалентны*:

(I) φ *п.н.сн.*;

(II) *для любого замкнутого F в T множество $\{x \in S \mid \varphi(x) \subset F\}$ замкнуто*:

(III) *для каждого открытого G в T множество $\{x \in S \mid \varphi(x) \cap G \neq \phi\}$ открыто.*

Доказательство аналогично доказательству утверждения 1.

---

*) Вещественная функция f полунепрерывна снизу в точке $x \in S$, если для каждого $\lambda < f(x)$ существует такая окрестность U точки x, что $\lambda < f(z)$ для всех $z \in U$.

Теорема 2 (характеризация п.н.сн. через последовательности). *Если отношение* φ *из* S *в* T *п.н.сн. в точке* x, *то для каждой последовательности* (x_n), *сходящейся к* x, *имеет место* $\varphi(x) \subset \mathrm{Li}(\varphi(x_n))$. *Наоборот, если*

$$\phi \neq \varphi(x) \subset \mathrm{Ls}(\varphi(x_n))$$

для сходящейся к x *последовательности* (x_n), *то* φ *п.н.сн. в* x.

Доказательство. Пусть φ п.н.сн. в x, последовательность (x_n) сходится к x и $y \in \varphi(x)$. Для любого натурального r обозначим через $B_r(y)$ шар радиуса $1/r$ с центром в y. Так как φ п.н.сн. в точке x, для каждого r существует такая окрестность V_r точки x, что для каждого $z \in V_r$ имеет место $\varphi(z) \cap B_r(y) \neq \phi$. Пусть $(n_r)_{r=1,\ldots}$ – такая последовательность натуральных чисел, что $n_r < n_{r+1}$ и $x_n \in V_r$ при $n > n_r$. Для n, подчиненного условию $n_r \leqq n < n_{r+1}$, выберем в множестве $\varphi(x_n) \cap B_r(y)$ точку y_n. Последовательность (y_n) по построению сходится к y.

С другой стороны, предположим, что φ не является п.н.сн. в точке x, т.е. найдется такое открытое множество G, где $G \cap \varphi(x) \neq \phi$, что каждая окрестность V точки x содержит точку z, для которой $\varphi(z) \cap G = \phi$. Тогда найдется сходящаяся к x последовательность (x_n), для которой $\varphi(x_n) \cap \cap G = \phi$. Пусть $y \in G \cap \varphi(x)$. Согласно предположенному, найдется сходящаяся к y подпоследовательность (y_{n_q}), для которой $y_{n_q} \in \varphi(x_{n_q})$. Для достаточно больших q мы имеем $y_{n_q} \in G$. Таким образом, $\varphi(x_{n_q}) \cap G \neq \phi$, и мы получаем противоречие.

Следующие утверждения являются тривиальными следствиями теоремы 2.

Утверждение 8. *Пусть отношения* φ_i *из* S *в* T_i $(i = 1, \ldots, n)$ *являются п.н.сн. в* x. *Тогда произведение отношений* $x \mapsto \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(x)$ *из* S *в* $\prod_{i=1}^{n} T_i$ *является п.н.сн. в* x.

Утверждение 9. *Пусть* E – *линейное метрическое пространство, а отношения* φ_i *из* S *в* E $(i = 1, \ldots, k)$ *являются п.н.сн. в точке* x. *Тогда сумма отношений* *) $x \mapsto \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x)$ *из* S *в* E *будет п.н.сн. в* x.

Утверждение 10. *Пусть* E – *линейное метрическое пространство, а отношение* φ *из* S *в* E *п.н.сн. в* x. *Тогда выпуклая оболочка* $\mathrm{conv}\,\varphi$ *(т.е.* $x \mapsto \mathrm{conv}\,\varphi(x)$*) будет п.н.сн. в* x.

Заметим, что пересечение п.н.сн. соответствий будет тоже п.н.сн. только в особых случаях (см. задачу 6).

Утверждение 11. *Пусть* φ – *п.н.сн. соответствие из* S *в* T, *а функция* $f\colon S \times T \to R$ *полунепрерывна сверху. Тогда функция* $x \mapsto \inf\{f(x,y) : y \in \varphi(x)\}$ *также полунепрерывна сверху.*

Доказательство. Положим $m(x) = \inf\{f(x,y) : y \in \varphi(x)\}$. Пусть $x_n \to x_0$. Мы должны показать, что $\lim\sup m(x_n) \leqq m(x_0)$.

---

*) О сумме отношений можно говорить в силу линейности пространства E (ср. утверждение 5). Не путать его с объединением отношений. (*Примеч. ред.*)

Рассмотрим сначала случай $m(x_0) > -\infty$. Тогда для каждого $\epsilon > 0$ найдется такое $y_\epsilon \in \varphi(x_0)$, что $f(x_0, y_\epsilon) - m(x_0) \leqq \epsilon$. Ввиду того что φ п.н.сн. в x_0, существует такая сходящаяся к y_ϵ последовательность (y_n), что $y_n \in \varphi(x_n)$ $(n = 1, \ldots)$. Следовательно, $f(x_n, y_n) \geqq m(x_n)$ и, значит,

$$\limsup m(x_n) \leqq \limsup f(x_n, y_n) \leqq$$
$$\leqq f(x_0, y_\epsilon) \leqq m(x_0) + \epsilon.$$

Если $m(x_0) = -\infty$, то для любого отрицательного λ найдется такое $y_\lambda \in \in \varphi(x_0)$, что $f(x_0, y_\lambda) \leqq \lambda$. Доказательство завершается, как в предыдущем случае.

Непрерывные соответствия

Определение 4. Отношение φ из S в T называется *непрерывным* (в точке x), если φ полунепрерывно и сверху, и снизу (в точке x).

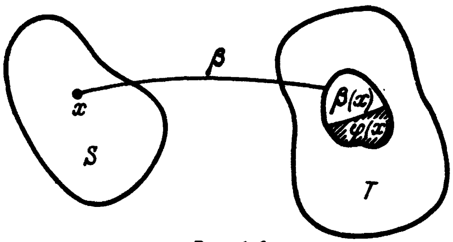

Рис. 1.3

Пример. Пусть f_i: $S \to \mathbf{R}^m$ $(i = 1, \ldots, n)$ – непрерывные функции. Определим $\varphi(x) = \operatorname{conv}\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$, т.е. как выпуклую оболочку точек $f_1(x), \ldots, f_n(x)$. Соответствие φ является непрерывным.

Пусть β – соответствие из S в T, а $\prec_x (x \in S)$ – бинарное отношение на $\beta(x)$ (рис. 1.3). Для каждого $x \in S$ рассмотрим множество $\varphi(x)$ максимальных в смысле $\prec_x$ элементов на множестве $\beta(x)$.

Многие задачи в экономической теории могут быть сведены к такой постановке. Элементы множества S описывают окружение некоторого участника экономики, а множество T описывает все априори доступные для него действия. Фактический выбор действия ограничивается окружением в его состоянии x до множества $\beta(x)$; он выбирает стратегию из этого множества согласно определенному критерию, описываемому отношением $\prec_x$, которое также может зависеть от состояния окружения. Что можно в связи с этим сказать о непрерывности соответствия φ из S в T?

Теорема 3. *Путь β – соответствие из S в T, а $\prec_x (x \in S)$ – некоторое иррефлексивное и транзитивное бинарное отношение на $\beta(x)$, непрерывное в том смысле, что множество*

$$\{(x, y, z) \in S \times T \times T \mid y, z \in \beta(x) \text{ и } y \nprec_x z\}$$

замкнуто в $S \times T \times T$.

Если множество $\beta(x)$ компактно, то множество $\varphi(x)$ всех максимальных в смысле $\prec_x$ элементов в $\beta(x)$ непусто и компактно, причем соответствие φ п.н.св. в каждой точке x непрерывности β.

Доказательство. Предположим, что $\varphi(x) = \phi$, т.е. что по каждому $y \in \beta(x)$ найдется $y' \in \beta(x)$, для которого $y \prec_x y'$. Пусть $\gamma(z) = \{y \in \in \beta(x) \mid y \prec_x z\}$. Семейство $\{\gamma(z)\}_{z \in \beta(x)}$ является открытым покрытием $\beta(x)$. Так как $\beta(x)$ компактно, из этого покрытия можно выделить некоторое конечное подпокрытие, скажем $\gamma(z_1), \ldots, \gamma(z_n)$. Ввиду транзитивности отношения $\prec_x$ конечное множество $\{z_1, \ldots, z_n\}$ имеет максимальный элемент, скажем z_n. Следовательно, $z_n \notin \gamma(z_i)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Из иррефлексивности отношения $\prec_x$ следует, что $z_n \notin \gamma(z_n)$, т.е. $z_n \in \in \beta(x)$, и мы пришли к противоречию.

Из свойства непрерывности отношения $\prec_x$ непосредственно следует, что множество $\varphi(x)$ замкнуто. Так как $\varphi = \beta \cap \varphi$, а β п.н.св. в точке x по утверждению 2, нам достаточно показать, что φ замкнуто в точке x. Пусть $(x_n, y_n) \to (x, y)$ и $y_n \in \varphi(x_n)$ $(n = 1)$. Покажем, что $y \in \varphi(x)$. Пусть z – произвольная точка в $\beta(x)$. Так как β п.н.сн. в x, по теореме 2 существует последовательность (z_n), сходящаяся к z, где $z_n \in \beta(x_n)$. Поэтому $y_n \not\prec_{x_n} z_n (n = 1, \ldots)$. Отсюда в силу непрерывности $\prec_x$ должно выполняться $y \not\prec_x z$.

Следовательно, y является максимальным элементом в $\beta(x)$, т.е. $y \in \in \varphi(x)$, что и требовалось.

Следствие. *Пусть соответствие β из S в T компактнозначно и непрерывно, а f: $S \times T \to \mathbf{R}$ – непрерывная функция. Тогда*:

(a) *функция*

$$x \mapsto m(x) := \max\{f(x, y) \mid y \in \beta(x)\}$$

непрерывна:

(b) *соответствие*

$$x \mapsto \{y \in \beta(x) \mid f(x, y) = m(x)\}$$

непусто, компактнозначно и п.н.св.

Доказательство. Утверждение (b) следует непосредственно из теоремы 3, если положить отношение $y_x \succ z$ как $(x, y) > f(x, z)$. Так как φ п.н.св., из утверждения 4 следует, что соответствие $x \mapsto (x, \varphi(x))$ п.н.св. Следовательно, композиция этого соответствия с непрерывной функцией f, т.е. $x \mapsto f(x, \varphi(x))$, также п.н.св. (следствие из утверждения 1). Так как $f(x, \varphi(x))$ состоит только из одного элемента, а именно из $m(x)$, мы доказали тем самым, что функция m непрерывна, что и требовалось.

Соответствие выбора φ в приведенной выше теореме 3, вообще говоря, не является непрерывным. Как мы увидим в дальнейшем, это отсутствие непрерывности порождает серьезные трудности в практических приложениях. Однако ввиду того, что соответствие является п.н.св., возможные разрывы оказываются локализованными. Интуитивно можно ожидать, что таких локализаций не будет слишком много. Во всяком случае, они не могут быть повсюду. Следующая теорема уточняет это соображение.

Пусть φ – соответствие S в T. Определим множество $C(\varphi, \epsilon)$ для каждого $\epsilon > 0$ "точек ϵ-непрерывности", положив

$$G(\varphi, \epsilon) := \left\{ x \in S \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{существует такая окрестность } U_x \text{ точки } x, \text{ что} \\ \sup \delta(\varphi(x), \varphi(z)) < \epsilon, \; z \in U_z \end{array} \right\},$$

где через δ обозначенно расстояние по Хаусдорфу, определенное в B.II.

Таким образом, в точке $\bar{x} \in C(\varphi, \epsilon)$ локализация множества $\varphi(\bar{x})$ меньше, чем ϵ, в смысле расстояния по Хаусдорфу. Ясно, что компактнозначное соответствие φ непрерывно в точке x тогда и только тогда, когда $x \in C(\varphi, \epsilon)$ для любого $\epsilon > 0$.

Теорема 4. *Пусть соответствие φ из метрического пространства S во вполне ограниченное метрическое пространство T компактнозначно и п.н.св. Тогда для любого $\epsilon > 0$ множество $C(\varphi, \epsilon)$ точек ϵ-непрерывности открытое и всюду плотно в S.*

Замечание. Метрическое пространство T называется вполне ограниченным, если для любого $\epsilon > 0$ существует конечное покрытие T множествами, диаметр которых меньше ϵ. Мы будем применять теорему 4 в случае $T = \mathbf{R}^m$. В действительности это имеет смысл, так как $\mathbf{R}^m$ можно рассматривать как подпространство компактного пространства $\mathbf{R}^m \cup \{\infty\}$ (см. B.I, (24) и (25)). Топологическое пространство $\mathbf{R}^m$ с метрикой, порожденной на него метрикой компактного метрического пространства $\mathbf{R}^m \cup \{\infty\}$, является вполне ограниченным. Мы хотим подчеркнуть, что в теореме 4 условия, касающиеся соответствия φ, носят топологический характер, в то время как условия, относящиеся к пространству T, топологическими не являются. Заключение теоремы носит опять-таки топологический характер.

Доказательство. Пусть $F_\epsilon : S \setminus C(\varphi, \epsilon)$. Так как φ компактнозначно и п.н.св., нетрудно проверить, что $x \in F_\epsilon$ тогда и только тогда, когда для каждой окрестности V точки x и для любого $\alpha < \epsilon$ существует такое $z \in V$, что $\rho(\varphi(x), \varphi(z)) > \alpha$, где

$$\rho(E, E') := \sup_{x \in E} \operatorname{dist}(x, E')$$

(см. доказательство утверждения 2, B. II). Покажем теперь, что множество F_ϵ замкнуто и нигде не плотно.

Покажем сначала, что F_ϵ замкнуто. Пусть последовательность (x_n) в F_ϵ сходится к $x \in S$ и $0 < \alpha < \beta < \epsilon$. Для каждого x_n существует такое $z_n \in S$, что $d(x_n, z_n) < 1/n$ и $\rho(\varphi(x_n), \varphi(z_n)) \geqq \beta$. Так как φ компактнозначно и п.н.св., должно быть $\rho(\varphi(x_n), \varphi(x)) \to 0$. Тогда для достаточно больших n из неравенства

$$\beta \leqq \rho(\varphi(x_n), \varphi(z_n)) \leqq$$
$$\leqq \rho(\varphi(x_n), \varphi(x)) + \rho(\varphi(x), \varphi(z_n))$$

следует $\rho(\varphi(x), \varphi(z_n)) \geqq \alpha$, т.е. $x \in F_\epsilon$. Следовательно, F_ϵ замкнуто.

Остается показать, что F_ϵ в S нигде не плотно. Предположим противное, т.е. что F_ϵ содержит непустое открытое множество G. Возьмем какую-нибудь возрастающую последовательность чисел $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ $\ldots < \epsilon$. Построим индуктивно последовательность (x_n) следующим образом. Выберем $x_1 \in G$ произвольно. Пусть x_n уже выбрано. Так как φ п.н.св. и $G \subset F_\epsilon$, то существует такое $x_{n+1} \in G$, что

$$\rho(\varphi(x_{n+1}), \varphi(x_n)) < \alpha_{n+1} - \alpha_n, \qquad \rho(\varphi(x_n), \varphi(x_{n+1})) \geqq \alpha_n.$$

Отсюда следует, что

$$\rho(\varphi(x_n), \varphi(x_j)) \geqq \alpha_n \quad \text{для } j > n.$$

Для $j = n + 1$ это неравенство выполняется по построению x_{n+1}. Для $j > n + 1$ оно выполняется потому, что из $\rho(\varphi(x_n), \varphi(x_j)) < \alpha_n$ мы получили бы

$$\rho(\varphi(x_{j-1}), \varphi(x_j)) \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=n+1}^{j-1} \rho(\varphi(x_k), \varphi(x_{k-1})) + \rho(\varphi(x_n), \varphi(x_j)) <$$

$$< \sum_{k=n+1}^{j-1} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) + \alpha_n = \alpha_{j-1},$$

что дает противоречие.

Тогда для $n \neq j$ должно быть либо

$$\rho(\varphi(x_n), \varphi(x_j)) \geqq \alpha_n \geqq \alpha_1,$$

либо

$$\rho(\varphi(x_j), \varphi(x_n)) \geqq \alpha_j \geqq \alpha_1.$$

Следовательно,

$$\delta(\varphi(x_n), \varphi(x_j)) \geqq \alpha_1 > 0.$$

Так как по условию метрическое пространство T вполне ограничено, в T существует конечная $\alpha_1/2$-сеть. Нетрудно проверить, что любое подмножество A в S находится на расстоянии, меньшем, чем $\alpha_1/2$, от некоторого $B \subset \{t_1, \ldots, t_q\}$ (здесь имеются в виду расстояния в смысле метрики Хаусдорфа δ).

Поставим в соответствие каждому $\varphi(x_n)$ такое множество $B_n \subset \{t_1, \ldots$ $\ldots, t_n\}$, что $\delta(\varphi(x_n), B_n) < \alpha_1/2$. Так как множество $\{t_1, \ldots, t_q\}$ конечно, найдутся два таких различных индекса i и j, что $B_i = B_j$. Поэтому

$$\delta(\varphi(x_i), \varphi(x_j)) \leqq \delta(\varphi(x_i), B_i) + \delta(B_i, \varphi(x_j)) < \alpha_1,$$

и мы получаем требуемое противоречие.

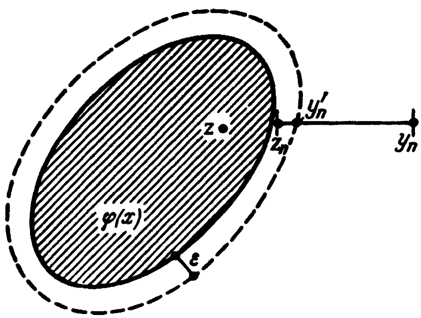

Рис. 1.4

Соответствие, компактнозначное и замкнутое в некоторой точке, не обязательно в этой точке п.н.св. Обычно бывает проще показать замкнутость соответствия, чем его полунепрерывность сверху. Поэтому полезна следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть φ – выпуклозначное соответствие из метрического пространства M в $\mathbf{R}^m$. Если φ компактнозначно, замкнуто и п.н.сн. в $x \in M$, то оно в x непрерывно.*

Доказательство. Пусть последовательность (x_n) сходится к x, и пусть $y_n \in \varphi(x_n)$. Мы должны показать (теорема 1), что последовательность (y_n) ограничена (рис. 1.4). Так как φ п.н.сн. в точке x, то для каждого $z \in \varphi(x)$ существует (теорема 2) сходящаяся к z последовательность (z_n), $z_n \in \varphi(x_n)$. Значения соответствия φ выпуклы, поэтому сегмент $[z_n, y_n]$ содержится целиком в $\varphi(x_n)$. Если последовательность (y_n) не ограничена, то из $z_n \to z \in \varphi(x)$ следует, что для каждого $\epsilon > 0$ найдется такое $y'_n \in [z_n, y_n]$, что $\operatorname{dist}(y'_n, \varphi(x)) = \epsilon$. Тогда в силу компактности $\varphi(x)$ последовательность (y'_n) ограничена; пусть, например, $(y'_{n_q}) \underset{q}{\to} y$. Значит, $\operatorname{dist}(y, \varphi(x)) = \epsilon$, что противоречит предположению о замкнутости φ в точке x и доказывает лемму.

Задачи

Задача 1. Пусть соответствие φ из S в T замкнуто. Показать, что образ $\varphi(K)$ компактного множества K замкнут в T.

Задача 2. Пусть соответствие φ из S в $\mathbf{R}^m_+$ замкнуто; предположим, что $\varphi(x) + \mathbf{R}^m_+ \subset \varphi(x)$ для всех $x \in S$. Показать, что замкнуто соответствие $x \mapsto \operatorname{conv}\varphi(x)$.

Задача 3. Пусть φ_i $(i = 1, \dots, k)$ – замкнутые соответствия из S в $\mathbf{R}^m_+$. Показать, что соответствие $x \mapsto \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x)$ замкнуто.

Задача 4. Показать, что компактнозначное соответствие φ из метрического пространства S в метрическое пространство T непрерывно тогда и только тогда, когда функция $\varphi\colon S \to \mathcal{K}_0 T$ непрерывна, где $\mathcal{K}_0 T$ – множество всех непустых компактных подмножеств T с заданным на нем расстоянием по Хаусдорфу δ.

Задача 5 (топологии Виеториса на $2^T \backslash \phi$). На множестве $2^T \backslash \phi$ непустых подмножеств топологического пространства T можно рассматривать две топологии: $\mathcal{T}_G$ и $\mathcal{T}_F$. Топология $\mathcal{T}_G$ определяется как самая грубая из топологий на $2^T \backslash \phi$, обладающих тем свойством, что для каждого открытого подмножества G в T множество $2^G \backslash \phi$ открыто. Аналогично топология $\mathcal{T}_F$ задается как самая грубая из топологий на $2^T \backslash \phi$ с тем свойством, что для каждого замкнутого подмножества F в T множество $2^F \backslash \phi$ замкнуто.

Показать, что соответствие φ из топологического пространства S в топологическое пространство T является п.н.св. (п.н.сн.) тогда и только тогда, когда отображение

$$\varphi\colon S \to (2^T \backslash \phi,\ \mathcal{T}_G)$$

(соответственно $\varphi\colon S \to (2^T \backslash \phi,\ \mathcal{T}_F)$) непрерывно.

Задача 6 (пересечение п.н.сн. соответствий). Пусть φ – выпуклозначное соответствие S в $\mathbf{R}^m$. Доказать, что если φ п.н.сн. в $\bar{x}$ и если y является внутренней точкой $\varphi(\bar{x})$, то существуют такие окрестности V и U соответственно точек $\bar{x}$ и y, что $U \subset \varphi(z)$ для всех $z \in V$, т.е. $(\bar{x}, y)$ является внутренней точкой графика φ.

Вывести отсюда:

(1) Если соответствия φ и ψ из S в $\mathbf{R}^m$ являются п.н.сн. в $\bar{x}$, то $\varphi(\bar{x}) \cap \psi(\bar{x}) \neq \phi$. Далее, если φ выпуклозначно и $\varphi(\bar{x})$ открыто, то отношение $x \mapsto \varphi(x) \cap \psi(x)$ является п.н.сн. в точке $\bar{x}$.

(2) Если φ и ψ – выпуклозначные соответствия из S в $\mathbf{R}^m$ – являются п.н.сн. в $\bar{x}$ и если $\operatorname{int}\varphi(\bar{x}) \cap \operatorname{int}\psi(\bar{x}) \neq \phi$, то отношение $x \mapsto \varphi(x) \cap \psi(x)$ будет п.н.сн. в x.

Литературные ссылки

Результаты, приведенные в этом разделе, более или менее знакомы экономистам-математикам. Большую часть материала можно найти у Бержа (1966). Теорема 4 содержится в работе Форта (1949), а приведенное здесь доказательство заимствовано у Диркера (1974).

С. РАЗЛИЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С.1. Обозначения

Предполагается, что читатель знаком с элементарной линейной алгеброй и с геометрией евклидова пространства $\mathbf{R}^m$.

Мы будем применять следующее обозначение:

i-я компонента вектора (*координата* точки) x в $\mathbf{R}^m$ обозначается x^i $(i = 1, \ldots, m)$; $x = (x^1, \ldots, x^m)$.

Пусть $x, y \in \mathbf{R}^m$; тогда:

$x \leqq y$ означает, что $x^i \leqq y^i$ для всех $i = 1, \ldots, m$;

$x \leqslant y$ означает, что $x \leqq y$ и $x \neq y$;

$x < y$ означает, что $x^i < y^i$ для всех $i = 1, \ldots, m$.

Пусть $x \in \mathbf{R}^m$ и $\alpha \in \mathbf{R}$; тогда $x \leqq (\alpha)$ означает, что $x^i \leqq \alpha$ для всех $i = 1, \ldots, m$.

Пусть X и Y – подмножества $\mathbf{R}^m$; тогда $X \leqq Y$ означает, что $x \leqq y$ для всех $x \in X$ и всех $y \in Y$.

Сумма подмножеств $\mathbf{R}^m$ определяется следующим образом:

$X + Y := \{ x + y \mid x \in X \text{ и } y \in Y \}$.

Множество $\mathbf{R}^m_+ := \{ x \in \mathbf{R}^m \mid 0 \leqq x \}$ называется *положительным ортантом* $\mathbf{R}^m$; множество $\mathbf{R}^m_- := -\mathbf{R}^m_+$ – *отрицательным ортантом.*

Пусть $x, y \in \mathbf{R}^m$. *Скалярное произведение* $\sum_{i=1}^{m} x^i y^i$ векторов x и y обозначается $x \cdot y$.

Пусть $p \in \mathbf{R}^m$ и $X \subset \mathbf{R}^m$; тогда

$p \cdot X := \{ p \cdot x \mid x \in X \}$.

Пусть $x \in \mathbf{R}^m$; тогда

$$|x| := \sum_{i=1}^{m} |x^i| \quad \text{и} \quad \|x\| := +\sqrt{x \cdot x}.$$

С.II. Выпуклые множества

Подмножество C пространства $\mathbf{R}^m$ называется *выпуклым*, если $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$ для всех $x, y \in C$ и $0 < \lambda < 1$.

Сумма $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ называется *выпуклой комбинацией* векторов $x_1, \ldots, x_n$, если $\lambda_1 \geqq 0, \ldots, \lambda_n \geqq 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

(1) *Подмножество в* $\mathbf{R}^m$ *выпукло тогда и только тогда, когда оно содержит все выпуклые комбинации его элементов.*

(2) *Замыкание* $\bar{C}$ *и внутренность* $\mathring{C}$ *выпуклого множества* C*-выпуклы.*

Выпуклая оболочка. Пусть A – подмножество $\mathbf{R}^m$. Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих множество A, называется *выпуклой оболочкой* A и обозначается $\operatorname{conv} A$.

(3) (Каратеодори.) *Пусть* A – *подмножество в* $\mathbf{R}^m$. *Тогда каждая точка* $x \in \operatorname{conv} A$ *является линейной комбинацией* $m + 1$ *точек из* A.

(4) *Выпуклая оболочка компактного подмножества в* $\mathbf{R}^m$ *компактна.*

(5) *Выпуклая оболочка суммы конечного числа множеств равна сумме их выпуклых оболочек*:

$$\operatorname{conv} \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{conv} A_i.$$

(6) (Шепли – Фолкман.) *Пусть* A_i $(i = 1, \ldots, n)$ – *непустые подмножества в* $\mathbf{R}^m$ и $x \in \operatorname{conv} \sum_{i=1}^{n} A_i$. *Тогда существуют такие точки* $x_i \in \operatorname{conv} A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, *что* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ и $|\{i \mid x_i \notin A_i\}| \leqq m$ *).

Асимптотические конусы. Подмножество C пространства $\mathbf{R}^m$, в котором $\lambda x \in C$ для всех $x \in C$ и $\lambda \geqq 0$, называется *конусом* (с вершиной в 0).

Пусть S – подмножество в $\mathbf{R}^m$. *Асимптотический конус от* S обозначается через $\mathbb{A}S$ и определяется как

$$\mathbb{A}S := \bigcap_{k=1}^{\infty} C(S^k),$$

где $C(S^k)$ – наименьший замкнутый конус, содержащий

$$S^k = \{x \in S \mid |x| \geqq k\}.$$

По определению $\mathbb{A}S$ является замкнутым конусом.

(7) *Если* $S \subset \mathbf{R}^m$ *и* $x \in \mathbf{R}^m$, *то* $\mathbb{A}(S + x) = \mathbb{A}S$.

(8) *Если* S – *замкнутое выпуклое подмножество* $\mathbf{R}^m$, *содержащее* 0, *то* $\mathbb{A}S \subset S$.

(9) *Если* Y – *замкнутое выпуклое подмножество* $\mathbf{R}^m$, *то* $Y + \mathbb{A}Y \subset Y$.

(10) *Пусть задано семейство подмножеств в* $\mathbf{R}^m$. *Если пересечение их асимптотических конусов совпадает с* $\{0\}$, *то пересечение самих этих множеств ограничено.*

---

*) Здесь и далее для любого множества A через $|A|$ будет обозначаться его мощность (в случае конечного множества A – число его элементов). (*Примеч. пер.*)

(11) (Теорема об отделимости. Минковский.) *Пусть A и B – непустые выпуклые подмножества в $\mathbf{R}^m$, не имеющие общих точек. Тогда существует гиперплоскость, отделяющая множества A и B, т.е. существует такая точка $p \in \mathbf{R}^m$, что*

$$\sup_{x \in A} p \cdot x \leqq \inf_{x \in B} p \cdot x$$

(рис. 1.5).

(12) *Пусть A – замкнутое выпуклое подмножество в $\mathbf{R}^m$, не содержащее прямых линий, и пусть D – всюду плотное подмножество в $\mathbf{R}^m$. Точка z принадлежит A тогда и только тогда, когда $\inf_{x \in A} v \cdot x \leqq v \cdot z$ для всех $v \in D$.*

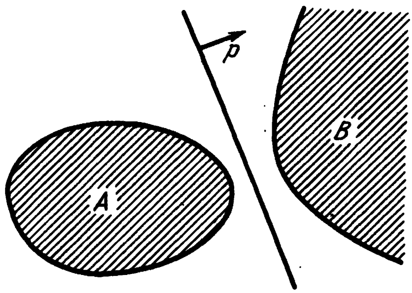

Рис. 1.5

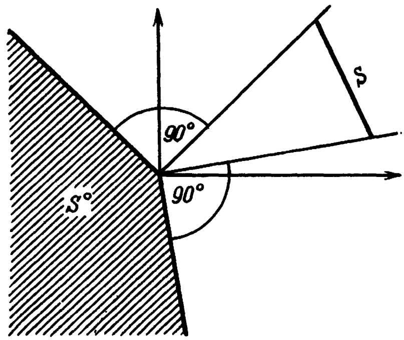

Рис. 1.6

Пусть $S \subset \mathbf{R}^m$. Множество $\{x \in \mathbf{R}^m \mid x \cdot z \leqq 0$ для всех $z \in S\}$ называется *полярой* S и обозначается S° (рис. 1.6).

(13) *Пусть C – замкнутый выпуклый конус в $\mathbf{R}^m$. Тогда поляра C° множества C также является замкнутым выпуклым конусом* *) *и $(C^\circ)^\circ = C$.*

C.III. Теоремы о неподвижной точке для соответствий

Неподвижной точкой соответствия φ из S в S называется такой элемент x из S, что $x \in \varphi(x)$.

(14) (Какутани.) *Пусть S – непустое компактное выпуклое подмножество в $\mathbf{R}^m$. Если соответствие φ из S в S выпуклозначно и замкнуто, то оно имеет неподвижную точку.*

Следующее утверждение, вытекающее из теоремы Какутани о неподвижной точке, является основой доказательства существования равновесия.

(15) (Дебре, Гейл, Кун, Никайдо.) *Пусть C – выпуклый замкнутый конус в $\mathbf{R}^m$ с вершиной в 0, не являющийся линейным подпространством. Если соответствие φ из множества C в $\mathbf{R}^m$ компактнозначно, выпукло-*

---

*) C° принято также называть конусом, *сопряженным* C. (*Примеч. пер.*)

значно, и п.н.св. и если $p \cdot \varphi(p) \leqq 0$ для всех $p \in C$, то существует такая точка $p^* \in C$, $p^* \neq 0$, что $\varphi(p^*) \cap C^\circ \neq \phi$.

Литературные ссылки

Результаты, приведенные в этом разделе, хорошо известны. В целом можно сослаться, например, на книгу Рокафеллара (1970). Доказательства теоремы Шепли – Фолкмана можно найти у Старра (1969). По поводу доказательства теоремы (15) см. Дебре (1956).

D. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МЕРЫ

D.I. Определения и основные факты *)

Измеримые пространства. *σ-алгеброй* $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω называется класс подмножеств Ω, содержащий ϕ и Ω и замкнутый относительно операций дополнения, счетного объединения и счетного пересечения. Пара $(\Omega, \mathcal{A})$, состоящая из множества Ω и σ-алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, называется *измеримым пространством*. Принадлежащие $\mathcal{A}$ подмножества Ω называются *$\mathcal{A}$-измеримыми*.

Если задан класс $\mathscr{C}$ подмножеств Ω, то наименьшая σ-алгебра (т.е. пересечение всех σ-алгебр), содержащая $\mathscr{C}$, называется *σ-алгеброй, порожденной классом* $\mathscr{C}$.

Борелевские σ-алгебры. Пусть T – метрическое пространство. *Борелевской σ-алгеброй* на T, обозначаемой $\mathscr{B}(T)$, называется σ-алгебра, порожденная всеми открытыми подмножествами T.

(1) *Если S – некоторое подпространство метрического пространства T, то*

$$\mathscr{B}(S) = \{B \cap S \mid B \in \mathscr{B}(T)\}.$$

В частности, если $S \in \mathscr{B}(T)$, то

$$\mathscr{B}(S) = \{B \subset S \mid B \in \mathscr{B}(T)\}.$$

Произведение измеримых пространств. Пусть $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ – два измеримых пространства. *Измеримым прямоугольником* в $\Omega_1 \times \Omega_2$ называется всякое подмножество вида

$$A_1 \times A_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2\},$$

где $A_1 \in \mathcal{A}_1$ и $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

σ-алгебра подмножеств из $\Omega_1 \times \Omega_2$, порожденная всеми измеримыми прямоугольниками, обозначается $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ и называется *произведением σ-алгебр* $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Измеримое пространство $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ называется в этом случае *произведением измеримых пространств* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ и

---

*) Этот раздел не является введением в теорию меры. Его единственной целью является введение обозначений и формулировка некоторых часто встречающихся в дальнейшем результатов. Материал раздела, если нет специальных ссылок, можно найти в любом учебнике, например у Неве (1965) или Лоэва (1963).

$(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$. Если $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, то для всех $\omega_1 \in \Omega_1$ сечение

$$A_{\omega_1} := \{\omega_2 \in \Omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in A\}$$

принадлежит $\mathcal{A}_2$.

Подчеркнем, что из $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ еще не следует, что множество

$$\Pr_{\Omega_1} A := \{\omega_1 \in \Omega_1 \mid (\omega_1, \omega_2) \in A \quad \text{для некоторого } \omega_2 \in \Omega_2\}$$

принадлежит $\mathcal{A}_1$.

Произведение конечного семейства $\{(\Omega_i, \mathcal{A}_i)\}_{i=1,\dots,n}$ измеримых пространств определяется аналогично и обозначается

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i\right).$$

Произведение борелевских σ-алгебр. (2) *Пусть T_1 и T_2 — два сепарабельных метрических пространства. Будем полагать*

$$\mathcal{B}(T_1) \times \mathcal{B}(T_2) = \mathcal{B}(T_1 \times T_2).$$

Измеримые функции. Пусть $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ — два измеримых пространства. Функция f: $\Omega_1 \to \Omega_2$ называется *измеримой*, если

$$f^{-1}(E) = \{\omega_1 \in \Omega_1 \mid f(\omega_1) \in E\} \in \mathcal{A}_1 \quad \text{для всех } E \in \mathcal{A}_2.$$

Если Ω_1 или Ω_2 — метрические пространства, то термин "измеримость" всегда будет относиться к борелевским σ-алгебрам.

(3) *Для того чтобы функция f измеримого пространства $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ в измеримое пространство $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ была измеримой, достаточно, чтобы существовал такой класс $\mathcal{C}$ подмножеств из $\mathcal{A}_2$, который бы порождал $\mathcal{A}_2$ и $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}_1$ для всех $C \in \mathcal{C}$.*

Примеры. (a) Для каждого $A \in \mathcal{A}$ характеристическая функция 1_A: $\Omega \to \mathbf{R}$ такая, что

$$1_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A, \\ 0, & \text{если } \omega \notin A, \end{cases}$$

измерима.

(b) Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ — измеримое пространство, а $\mathcal{A}'$ — некоторая σ-подалгебра $\mathcal{A}$. Тождественная функция id: $\omega \mapsto \omega$ из $(\Omega, \mathcal{A})$ в $(\Omega, \mathcal{A}')$ измерима.

(c) Всякая полунепрерывная сверху или снизу функция (в частности, любая непрерывная функция) из метрического пространства M в $\overline{\mathbf{R}}$ измерима.

(d) Функция f: $(\Omega, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbf{R}}$ измерима, если

$$\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) < \lambda\} \in \mathcal{A} \qquad \text{для всех } \lambda \in \mathbf{R}.$$

(4) *Если функции f из $(\Omega, \mathcal{A})$ в $(\Omega', \mathcal{A}')$ и g из $(\Omega', \mathcal{A}')$ в $(\Omega'', \mathcal{A}'')$ измеримы, то и композиция $g \circ f$ из $(\Omega, \mathcal{A})$ в $(\Omega'', \mathcal{A}'')$ также измерима.*

(5) *Пусть f_i — измеримые функции из $(\Omega, \mathcal{A})$ в $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ $(i = 1, \dots, n)$; тогда функция $\omega \mapsto (f_1(\omega), \dots, f_n(\omega))$ из $(\Omega, \mathcal{A})$ в $\left(\prod_{i=1}^{n} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i\right)$ измерима.*

Укажем некоторые свойства измеримых функций.

(6) *Пусть f и g – измеримые функции из $(\Omega, \mathcal{A})$ в $\mathbf{R}$. Тогда функции*

$$f+g\colon\ \omega \mapsto f(\omega) + g(\omega),$$

$$fg\colon\ \omega \mapsto f(\omega)g(\omega),$$

$$\sup\{f, g\}\colon\ \omega \mapsto \sup\{f(\omega), g(\omega)\}$$

измеримы.

Пусть f_n – такая последовательность измеримых функций из $(\Omega, \mathcal{A})$ в $\mathbf{R}$, что предел $\lim\limits_n f_n(\omega)$ существует для всех $\omega \in \Omega$. Тогда функция $\omega \mapsto \lim\limits_n f_n(\omega)$ измерима.

(7) *Пусть даны измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{A})$ и функция f из $\Omega \times [0, 1]$ в $[0, 1]$, для которой:*

(a) *функция $f(\cdot, \xi)$ $\mathcal{A}$-измерима для всех $\xi \in [0, 1]$;*

(b) *функция $f(\omega, \cdot)$ непрерывна справа при всех $\omega \in \Omega$.*

Тогда функция f является $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}([0, 1])$-измеримой.

(8) *Пусть g – измеримая функция из измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{A})$ в измеримое пространство $(T, \mathcal{J})$, а $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$. В этом случае функция f измерима по отношению к σ-алгебре $g^{-1}(\mathcal{J})$ тогда и только тогда, когда существует такая измеримая функция h из $(T, \mathcal{J})$ в $\mathbf{R}^m$, что $f = h \circ g$.*

Пространства с мерой. Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ – измеримое пространство. *Вероятностной мерой* ν на $\mathcal{A}$ называется функция на $\mathcal{A}$ со значениями в $[0, 1]$, причем $\nu(\Omega) = 1$, которая обладает свойством счетной аддитивности, т.е. каждая последовательность (E_n), где $E_n \in \mathcal{A}$ и $E_n \cap E_{n'} = \phi$ $(n \neq n')$, удовлетворяет соотношению

$$\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n).$$

Пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ задано, если указаны непустое множество Ω, σ-алгебра его подмножеств $\mathcal{A}$ и мера ν, определенная на $\mathcal{A}$.

Для каждой последовательности подмножеств (E_n) множества Ω зададим подмножества $\limsup\limits_{n \to \infty} E_n$ и $\liminf\limits_{n \to \infty} E_n$ соотношениями

$$\limsup_{n \to \infty} E_n := \bigcap_n \bigcup_{m \geqq n} E_m,$$

$$\liminf_{n \to \infty} E_n := \bigcup_n \bigcap_{m \geqq n} E_n.$$

Подмножество $\lim\sup E_n$ (подмножество $\lim\inf E_n$) множества Ω состоит из всех тех $\omega \in \Omega$, которые принадлежат бесконечному числу (соответственно всем, за исключением, может быть, конечного числа) множеств E_n $(n \geqq 1)$. Ясно, что всегда $\lim\inf E_n \subset \lim\sup E_n$. Если эти множества совпадают, то их обозначают $\lim\limits_n E_n$.

(9) (Последовательная непрерывность.) *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ *– пространство с мерой, а* (E_n) *– последовательность, где* $E_n \in \mathcal{A}$. *Тогда*

$$\nu(\liminf_{n \to \infty} E_n) \leqq \liminf_{n \to \infty} \nu(E_n) \leqq$$
$$\leqq \limsup_{n \to \infty} \nu(E_n) \leqq \nu(\limsup_{n \to \infty} E_n).$$

В частности, если существует $\lim\limits_n E_n$, *то предел* $\lim\limits_n \nu(E_n)$ *также существует и равен* $\nu\,(\lim\limits_n E_n)$.

(10) (Лемма Бореля – Кантелли.) *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ *– пространство с мерой, а* E_n *– некоторая последовательность множеств в* $\mathcal{A}$. *Если* $\Sigma_n \nu(E_n) < \infty$, *то* $\nu(\lim_n \sup E_n) = 0$.

Пусть f и g – два измеримых отображения из $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в некоторое сепарабельное метрическое пространство T. Тогда множество $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq \neq g(\omega)\}$ измеримо. Если его мера равна нулю, то говорят, что f и g почти везде равны, и обозначают это $f = g$ почти везде (п.в.) на Ω.

Полные пространства с мерой. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ – пространство с мерой. Подмножество N из Ω называется *пренебрежимо малым*, если существует такое множество $E \in \mathcal{A}$, что $N \subset E$ и $\nu(E) = 0$. Пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ называется *полным*, если $\mathcal{A}$ содержит все пренебрежимо малые подмножества Ω.

Если $\mathcal{N}$ есть класс всех пренебрежимо малых множеств пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$, то класс $\mathcal{A}_\nu$ всех подмножеств вида $E \cup N$, где $E \in \mathcal{A}$ и $N \in \mathcal{N}$, совпадает с σ-алгеброй, порожденной $\mathcal{A}$ и $\mathcal{N}$. Кроме того, соотношение $\bar{\nu}(E \cup N) := \nu(E)$ задает единственную меру $\bar{\nu}$ на $\mathcal{A}_\nu$, которая является расширением ν, причем пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{A}_\nu, \bar{\nu})$ полно.

(11) (Теорема о проекциях*).) *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ *– полное пространство с мерой, а* S *– полное сепарабельное метрическое пространство. Тогда* $\mathrm{Pr}_\Omega(M) \in \mathcal{A}$ *для всех* $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(S)$.

Неатомические пространства с мерой. Подмножество A из Ω называется *атомом* пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$, если $\nu(A) > 0$ и из $B \subset A$ следует либо $\nu(B) = \nu(A)$, либо $\nu(B) = 0$. Пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$, а также сама мера ν на $(\Omega, \mathcal{A})$ называются *неатомическими*, если $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ не имеет атомов.

Пример. Пространство с мерой $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$, где λ – лебегова мера на $[0, 1]$.

Если пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ неатомическое, то множество Ω несчетно. На атоме измеримая функция почти всюду постоянна.

(12) *Любое измеримое пространство имеет не более чем счетное множество непересекающихся атомов. Поэтому любое измеримое пространство*

---

*) Читатель, знакомый с теорией меры, заметит, что в этой теореме содержатся два утверждения: во-первых, теорема о проекциях для аналитических множеств (Марчевский и Рылль-Нардзевский, 1953) и, во-вторых, свойство измеримости аналитических множеств (Сакс, 1937).

может быть представлено в виде объединения счетного числа атомов и его неатомической части

(13) *На несчетном полном сепарабельном метрическом пространстве всегда можно задать неатомическую меру* *).

(14) *Мера μ на сепарабельном метрическом пространстве T является неатомической тогда и только тогда, когда $\mu(t) = 0$ для всех $t \in T$.*

Для применений теории меры к экономике фундаментальным оказывается следующее утверждение.

(15) (Теорема Ляпунова **).) *Пусть ν_i $(i = 1, \dots, m)$ — неатомические меры на $(\Omega, \mathcal{A})$. Тогда множество*

$$\{\nu_1(E), \dots, \nu_m(E)) \in \mathbf{R}^m \mid E \in \mathcal{A}\}$$

является выпуклым и замкнутым подмножеством $\mathbf{R}^m$.

Интегрирование. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ — пространство с мерой, а f — ступенчатая функция на Ω со значениями в $\mathbf{R}$. Это значит, что существует такое конечное разбиение $\{A_1, \dots, A_n\}$ пространства Ω, что $A_i \in \mathcal{A}$ и функция f постоянна на каждом из множеств A_i. Измеримой ступенчатой функции поставим в соответствие вещественное число $\sum_i f(A_i)\nu(A_i)$. Это число называется *интегралом* (или *средним*, или *математическим ожиданием*) функции f и обозначается $\int f d\nu$ или просто $\int f$.

Операцию $\int(\cdot) d\nu$ можно распространить с множества ступенчатых функций на множество всех положительных измеримых функций.

Пусть $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ — положительная измеримая функция. Тогда существует возрастающая, сходящаяся к f последовательность f_n измеримых ступенчатых функций. Можно показать, что для каждой такой последовательности f_n существует предел $\lim_n \int f_n d\nu$ (он может быть равен $+\infty$), который не зависит от конкретной последовательности (f_n). Поэтому, если этот предел конечен, функция f называется *интегрируемой* и ее интеграл определяется соотношением

$$\int f d\nu := \lim_{n \to \infty} \int f_n d\nu.$$

Измеримая функция f из $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в $\mathbf{R}$ называется *интегрируемой*, если интегрируемы две положительные функции f^+ и f^-, где

$$f^+(\omega) = \max(0, f(\omega)),$$

$$f^-(\omega) = \max(0, -f(\omega)).$$

При этом интеграл функции f задается равенством

$$\int f d\nu := \int f^+ d\nu - \int f^- d\nu.$$

Множество всех интегрируемых функций из (Ω, A, ν) в $\mathbf{R}$ обозначается $\mathcal{L}(\Omega, A, \nu)$ или просто $\mathcal{L}$.

---

*) См., например, Партхасратхи (1967), теорема 8.1.

**) Краткое доказательство см. Линденштраусс (1969).

Интеграл $\int(\cdot)d\nu$, заданный на $\mathcal{L}(\Omega, A, \nu)$, обладает следующими свойствами:

(16) *Если* $\nu\{\omega\in\Omega \mid f(\omega)<0\}=0$, *то* $\int f \geqq 0$;
если $f \leqq g$, *то* $\int f \leqq \int g$.

(17) $\int cf = c\int f$ *для всех* $c\in\mathbf{R}$;
$\int(f+g) = \int f+\int g$.

(18) (Теорема о монотонной сходимости.) *Если последовательность* f_n *в* $\mathcal{L}$ *монотонно возрастает (убывает), предел* $f_n(\omega)$ *конечен при всех* $\omega \in \Omega$ *и предел интеграла* $\lim\limits_n \int f_n$ *также конечен, то* $\lim\limits_n f_n \in \mathcal{L}$ *и* $\lim\limits_n \int f_n = \int\lim\limits_n f_n$.

(19) (Лемма Фату.) *Пусть* (f_n) *— последовательность в* $\mathcal{L}$. *Если* $f_n \leqq g$ $(n=1,\ldots)$, *где* $g\in\mathcal{L}$, *то*

$$\int\limsup_n f_n \geqq \limsup_n \int f_n.$$

Если $h \leqq f_n$ $(n=1,\ldots)$, *где* $h\in\mathcal{L}$, *то*

$$\int\liminf_n f_n \leqq \liminf_n \int f_n.$$

(20) (Теорема Лебега.) *Пусть* (f_n) *— последовательность в* $\mathcal{L}$. *Если* $\lim\limits_n f_n(\omega)$ *существует при всех* $\omega\in\Omega$ *и* $|f_n| \leqq g$ $(n=1,\ldots)$, *где* $g\in\mathcal{L}$, *то* $\lim\limits_n f_n \in\mathcal{L}$, *и* $\int\lim\limits_n f_n = \lim\limits_n \int f$.

Сходимость измеримых функций. Пусть (f_n) — последовательность измеримых функций из $(\Omega,\mathcal{A},\nu)$ в $\mathbf{R}$.

Говорят, что последовательность (f_n) *сходится* к измеримой функции f:

почти везде, если

$$\nu\{\omega \mid \lim_n f_n(\omega) = f(\omega)\} = 1;$$

по мере, если

$$\nu\{\omega \mid |f_n(\omega)-f(\omega)| > \epsilon\} \underset{n}{\to} 0 \text{ для всех } \epsilon > 0;$$

в среднем, если f_n и f принадлежат $\mathcal{L}$ и

$$\int|f_n - f|d\nu \underset{n}{\to} 0.$$

Приводимые далее результаты, которыми мы будем часто пользоваться, выражают связь между этими понятиями сходимости.

(21) *Последовательность измеримых функций* (f_n), *сходящаяся к* f *почти везде, сходится к* f *по мере. Обратно, из любой сходящейся по мере последовательности измеримых функций можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к тому же пределу почти везде.*

(22) *Пусть* (f_n) *— последовательность положительных интегрируемых функций. Эта последовательность сходится в среднем к интегрируемой*

функции f тогда и только тогда, когда (f_n) сходится к f по мере, и $\lim_n \int f_n = \int f$.

(23) (Теорема Шеффе.) *Пусть (f_n) – последовательность положительных интегрируемых функций. Если*

$$\int \liminf_n f_n = \lim_n \int f_n < \infty,$$

то последовательность (f_n) сходится к $\liminf_n f_n$ *в среднем.*

(24) (Теорема Фубини.) *Пусть $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \nu_1)$* и *$(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \nu_2)$ – два измеримых пространства. Существует и притом только одна мера ν на $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, для которой $\nu(E_1 \times E_2) = \nu_1(E_1) \cdot \nu_2(E_2)$ при любых $E_1 \in \mathcal{A}_1$ и $E_2 \in \mathcal{A}_2$. Для любой положительной измеримой функции f из $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ в* $\mathbf{R}$ *имеет смысл и верна следующая формула:*

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\nu = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \cdot) d\nu_2 \right) d\nu_1 =$$

$$= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\cdot, \omega_2) d\nu_1 \right) d\nu_2 .$$

Здесь мера ν на $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ называется произведением мер и обозначается через $\nu_1 \times \nu_2$.

(25) (Теорема Радона – Никодима.) *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ – пространство с мерой и пусть η – некоторая счетно аддитивная функция из $\mathcal{A}$ в* $\mathbf{R}$, *причем $\eta(A) = 0$ для всех таких A, что $\nu(A) = 0$. Тогда существует такая измеримая функция g из Ω в* $\mathbf{R}$ *(единственная с точностью до ν-эквивалентности), что*

$$\eta(A) = \int_A g d\nu, \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Для того чтобы функция g была положительной (интегрируемой), необходимо и достаточно, чтобы функция η была положительной (ограниченной).

Слабая сходимость мер *). Пусть T – метрическое пространство и (μ_n) – последовательность мер на T. Говорят, что последовательность μ_n сходится к мере μ на T *слабо*, если $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ для любой непрерывной и ограниченной функции f из T в $\mathbf{R}$.

(26) *Следующие утверждения эквивалентны:*

(I) *Последовательность (μ_n) слабо сходится к μ.*

(II) $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ *для всех ограниченных и равномерно непрерывных функций f.*

(III) *Для любого замкнутого подмножества F в T имеет место* $\limsup_n \mu_n(F) \leq \mu(F)$.

(IV) *Для любого открытого подмножества G в T имеет место* $\liminf_n \mu_n(G) \geq \mu(G)$.

---

*) Материал этого раздела взят из книги Биллингсли (1968).

(V) *Для любого подмножества A в T, у которого μ-мера границы равна нулю, имеет место* $\lim\limits_{n} \mu_n(A) = \mu(A)$.

Примеры.

(a) Пусть $T = \mathbf{R}^m$. Каждая мера μ на $\mathbf{R}^m$ имеет функцию распределения $F_\mu : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, определенную равенством

$$F_\mu(x) = \mu\{z \in \mathbf{R}^m \mid z \leqq x\}.$$

Последовательность (μ_n) мер на $\mathbf{R}^m$ слабо сходится к мере μ на $\mathbf{R}^m$ тогда и только тогда, когда последовательность функций распределения (F_{μ_n}) сходится к F_μ в каждой точке непрерывности F_μ.

(b) Пусть μ_n и μ_0 – меры на метрическом пространстве T, заданные соответственно своими плотностями q_n и q_0 относительно меры ν на T, т.е.

$$\int_B g_n \, d\nu = \mu_n(B), \quad B \in \mathcal{B}(T).$$

Если $g_n(t) \to g_0(t)$ п.в. на T, то последовательность (μ_n) сходится слабо к μ_0. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пусть μ – мера на произведении пространств $S \times T$. Мера μ^S на S, задаваемая равенством $\mu^S(B) = \mu(B \times T)$, называется *проекцией меры* μ на S (*частным распределением* μ на S).

(27) *Если (μ_n) – последовательность мер на сепарабельном метрическом пространстве $S \times T$ – слабо сходится к мере μ, то последовательности проекций (μ_n^S) и (μ_n^T) слабо сходятся к соответствующим проекциям μ^S и μ^T.*

Пусть (μ_n) и (ν_n) – последовательности мер соответственно на сепарабельных метрических пространствах S и T. Последовательность произведений мер $(\mu_n \times \nu_n)$ на $S \times T$ слабо сходится к произведению мер $\mu \times \nu$ на $S \times T$ тогда и только тогда, когда (μ_n) слабо сходится к μ, а (ν_n) слабо сходится к ν.

Пусть T – сепарабельное метрическое пространство; обозначим через $\mathcal{M}(T)$ множество всех мер на T.

(28) *На $\mathcal{M}(T)$ существует такая метрика ρ, что метрическое пространство $(\mathcal{M}(T), \rho)$ сепарабельно, и последовательность (μ_n) сходится к μ на $(\mathcal{M}(T), \rho)$ тогда и только тогда, когда она слабо сходится.*

Дадим явное определение такой метрики, называемой *метрикой Прохорова*:

$$\rho(\mu, \nu) = \inf\{\epsilon > 0 \mid \nu(E) \leqq \mu(B_\epsilon(E)) + \epsilon \quad \text{и}$$
$$\mu(E) \leqq \nu(B_\epsilon(E)) + \epsilon \ \text{для всех} \ E \in \mathcal{B}(T)\}.$$

Пусть μ – некоторая мера на сепарабельном метрическом пространстве T. Тогда в T существует замкнутое подмножество S, обладающее следующими свойствами: $\mu(S) = 1$ и $S \subset F$, если F – замкнутое подмножество в T, для которого $\mu(F) = 1$. Таким образом, S является наименьшим подмножеством T меры 1. Это множество называется *носителем* меры μ и обозначается supp μ.

(29) *Множество мер, имеющих конечные носители, всюду плотно в* $(\mathcal{M}(T), \rho)$.

(30) *Если T – компактное метрическое пространство, то* $(\mathcal{M}(T), \rho)$ *также является компактным метрическим пространством.*

Плотные меры. Семейство мер M на метрическом пространстве T называется *плотным*, если для любого $\epsilon > 0$ найдется такое компактное множество $K \subset T$, что $\mu(K) > 1 - \epsilon$ для всех $\mu \in M$.

(31) *Если семейство мер M плотно, то каждая последовательность мер (μ_n) в M содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.*

(32) *Если в сепарабельном метрическом пространстве последовательность (μ_n) слабо сходится к μ, а каждая из мер μ_n и μ плотна, то и семейство $\{\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots\}$ плотно.*

(33) *На сепарабельном метрическом пространстве любая мера μ является плотной.*

(34) *Пусть T – сепарабельное полное метрическое пространство. Если множество мер M на T слабо относительно компактно, то оно плотно.*

(35) *Семейство мер на произведении пространств $S \times T$ плотно тогда и только тогда, когда оба семейства соответствующих проекций пространства S и T плотны на них.*

Распределение. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ – пространство с мерой, M – метрическое пространство, а f – измеримая функция из Ω в M. *Распределением* f, обозначаемым $\nu \circ f^{-1}$, называется мера μ на M, для которой

$$\mu(B) := \nu\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in B\} \text{ для всех } B \in \mathcal{B}(M).$$

Распределение функции f называется также *законом распределения для* f или *образом меры ν при f*.

На языке теории вероятностей f называется *случайной величиной* со значениями в M. Если $M = \mathbf{R}^m$, то f называется *одномерной случайной величиной*. Для большинства вопросов распределение μ функции f содержит всю интересующую нас информацию о случайной величине f. Природа пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ бывает часто весьма разнообразной.

Пусть g – измеримое отображение метрического пространства M в метрическое пространство M'. Тогда

$$(\nu \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = \nu \circ (g \circ f)^{-1}.$$

(36) (Формула замены переменных.) *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ – некоторое пространство с мерой, M – метрическое пространство, а $\mathcal{A}: \Omega \to M$ и $h: M \to \mathbf{R}$ – измеримые отображения. Тогда для $\nu \circ f^{-1}$-интегрируемости функции h необходимо и достаточно, чтобы функция $h \circ f$ была ν-интегрируемой и* $\int_M h\,d(\nu \circ f^{-1}) = \int_\Omega (h \circ f)\,d\nu$.

Всякая мера μ на метрическом пространстве T представляет собой распределение некоторой измеримой функции на некотором пространстве с мерой, т.е. $(\Omega, \mathcal{A}, \nu) = (T, \mathcal{B}(T), \mu)$ и $f: \omega \mapsto \omega$ является тождественной на Ω функцией. Если метрическое пространство сепарабельно и полно, то для каждой меры μ на T существует измеримое отображение f единичного интервала $[0, 1]$ в T, причем $\mu = \lambda \circ f^{-1}$, где λ – лебегова мера на $[0, 1]$.

В более общем виде это можно сформулировать следующим образом.

(37) (Теорема Скорохода *).) *Пусть T – сепарабельное метрическое пространство, а (μ_n) – слабо сходящаяся к пределу μ последовательность мер на T. Тогда существуют такое пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ и такие измеримые отображения f и f_n из Ω в $T(n = 1, \ldots)$, что $\mu = \nu \circ f^{-1}$, $\mu_n = \nu \circ f_n^{-1}$ и $\lim_n f_n = f$ почти везде на Ω. Кроме того, если T – полное сепарабельное метрическое пространство, то в качестве пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ можно взять единичный сегмент с заданной на нем мерой Лебега.*

Пусть последовательность мер μ_n на метрическом пространстве T слабо сходится к мере μ на T. Если h – непрерывное отображение из T в метрическое пространство T', то ясно, что последовательность мер $(\mu_n \circ h^{-1})$ на T слабо сходится к мере $\mu \circ h^{-1}$.

В более общей форме:

(38) *Пусть последовательность мер (μ_n) на T слабо сходится к пределу μ, а последовательность (h_n) измеримых отображений T в метрическое пространство T' на всех компактных подмножествах T сходится равномерно к непрерывной функции h. Тогда последовательность $(\mu_n \circ h_n^{-1})$ слабо сходится к $\mu \circ h^{-1}$.*

Сходимость по распределению. Во многих приложениях (в теории вероятностей, как и в экономике) мы приходим к следующей ситуации: для каждого $n = 0, 1, \ldots$ задается измеримое отображение f_n из пространства с мерой $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \nu_n)$ в метрическое пространство T. Отображения f_n могут быть заданы на различных пространствах с мерой. Однако все функции f_n принимают значения из одного и того же метрического пространства T. В таких случаях мы, как правило, не будем явно указывать природу тех пространств с мерой, на которых заданы функции f_n.

Последовательность измеримых отображений (f_n) со значениями в метрическом пространстве T называется *сходящейся по распределению* к измеримому отображению f со значениями в T, если последовательность распределений (μ_n) отображений f_n слабо сходится к распределению μ отображения f.

Если $T = \mathbf{R}$, а все отображения f_n и f заданы на одном и том же пространстве с мерой, то из сходимости по мере и тем более из сходимости почти везде следует сходимость по распределению.

Обратное утверждение справедливо только в том случае, когда отображение f постоянно.

В более общей форме:

(39) *Если все функции f_n и f заданы на одном и том же пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ и принимают значения в сепарабельном метрическом пространстве (T, d), то функция $\omega \mapsto d(f_n(\omega), f(\omega))$ из Ω в $\mathbf{R}$ измерима; если последовательность $(d(f_n(\cdot), f(\cdot)))_{n=1,\ldots}$ сходится по мере к нулю, то последовательность (f_n) сходится по распределению к f.*

---

*) Для полного сепарабельного метрического пространства см. Скороход (1965); общий случай см. в работе Дадли (1968).

Сформулируем, наконец, одно обобщение теоремы Лебега.

Пусть f_n – измеримое отображение из $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \nu_n)$ в $\mathbf{R}$. Последовательность $(f_n)_{n=1,\dots}$ называется *равномерно интегрируемой*, если

$$\lim_{q\to\infty} \left(\sup_n \int_{|f_n|>q} |f_n|\, d\nu_n\right) = 0.$$

(40) *Последовательность (f_n) равномерно интегрируема тогда и только тогда, когда*:

(I) $\sup\limits_n \int |f_n|\, d\nu_n < \infty$;

(II) $\lim\limits_n \int_{E_n} |f_n|\, d\nu_n \to 0$ *для всех таких последовательностей* (E_n), *что* $\nu(E_n) \to 0$.

Последовательность (f_n) оказывается равномерно интегрируемой, если существует такая интегрируемая функция g, заданная на некотором пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$, что

$$\nu_n\{\omega\in\Omega_n \mid |f_n(\omega)| \geqq q\} \leqq \nu\{\omega\in\Omega \mid |g(\omega)| \geqq q\}$$

для всех $n = 1, \dots$ и $q > 0$.

В частности, когда все функции f_n заданы на одном и том же пространстве с мерой, то последовательность (f_n) равномерно интегрируема, если существует такая интегрируемая функция g, что $|f_n| \leqq g$ для всех n.

(41) *Если последовательность (f_n) равномерно интегрируема, то последовательность распределений функций f_n плотна.*

(42) (Обобщение теоремы Лебега.) *Пусть последовательность (f_n) измеримых функций сходится по распределению к измеримой функции f. Если при этом последовательность (f_n) равномерно интегрируема, то и f интегрируема, и*

$$\lim_n \int f_n\, d\nu_n = \int f d\nu. \qquad (*)$$

Кроме того, если функции f и f_n положительны и интегрируемы, то из $(*)$ следует, что последовательность (f_n) равномерно интегрируема.

(43) (Теорема Гливенко – Кантелли *).) *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ – пространство с мерой, а (x_n) – последовательность независимых, одинаково распределенных измеримых отображений x_n из Ω в сепарабельное метрическое пространство T. Пусть $\mu_n(\omega, \cdot)$ для каждого $\omega\in\Omega$ является распределением выборки $\{x_1(\omega), \dots, x_n(\omega)\}$ объема n $(n = 1, \dots)$, т.е.*

$$\mu_n(\omega, B) = \frac{1}{n}\, |\{\, i \mid x_i(\omega)\in B,\ i = 1, \dots, n\,\}|.$$

Тогда почти для всех $\omega\in\Omega$ последовательность $(\mu_n(\omega, \cdot))_{n=1,\dots}$ выборочных распределений слабо сходится к распределению отображения x_n.

---

*) См. Партхасаратхи (1967), теорема 7.1, с. 53.

D.II. ИНТЕГРАЛ СООТВЕТСТВИЯ *)

D.II.1. Определение

Суммой $S_1 + \ldots + S_n$ конечного семейства множеств S_i из $\mathbf{R}^m$ называется множество всех сумм вида $x_1 + \ldots + x_n$, где $x_i \in S_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. В этом разделе мы будем рассматривать суммы (или, более точно, взвешенные суммы) произвольных семейств множеств в $\mathbf{R}^m$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ – пространство с мерой, а f: $\Omega \to \mathbf{R}^m$, т.е.

$$f = (f^1, \ldots, f^m), \quad f^i: \Omega \to \mathbf{R}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Функция f называется *интегрируемой*, если интегрируемы все координатные функции f^i: $\Omega \to \mathbf{R}$. Интеграл $\int f d\nu$ определяется как вектор

$$(\int f^1 d\nu, \ldots, \int f^m d\nu).$$

Пусть φ – соответствие из Ω в $\mathbf{R}^m$. Обозначим через $\mathcal{L}_\varphi$ множество ν-интегрируемых функций f: $\Omega \to \mathbf{R}^m$, обладающих тем свойством, что $f(\omega) \in \varphi(\omega)$ п.в. в Ω. Функции, принадлежащие множеству $\mathcal{L}_\varphi$, называются *интегрируемыми селекторами* соответствия φ.

Определение. Множество

$$\{\int f d\nu \in \mathbf{R}^m \mid f \in \mathcal{L}_\varphi\}$$

называется *интегралом соответствия* φ и обозначается $\int \varphi d\nu$ или просто $\int \varphi$.

По этому определению такой интеграл имеет смысл для любого соответствия. Тем не менее еще следует показать, что для достаточно широкого класса соответствий интеграл этот не пуст. Иными словами, следует доказать существование интегрируемого селектора. Соответствия, допускающие интегрируемый селектор, называются *интегрируемыми*. Иногда мы будем употреблять обозначение $\int \varphi$ для отношений общего вида, даже если может оказаться, что на некотором множестве положительной меры $\varphi(\omega) = \phi$. Тогда мы, естественно, полагаем $\int \varphi := \phi$.

D.II.2. Измеримые селекторы соответствия

Теорема 1 (об измеримом селекторе). *Пусть φ – соответствие некоторого пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в полное сепарабельное метрическое пространство S, причем график φ принадлежит $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(S)$. Тогда найдется такая измеримая функция f из Ω в S, что $f(\omega) \in \varphi(\omega)$ почти везде в Ω.*

Замечание. В теореме 1 достаточно предположить, что график G_φ соответствия φ представляет собой $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(S))$-*аналитическое* множество, т.е. подмножество $\Omega \times S$, полученное в результате применения к классу

*) Результаты этого раздела не содержатся в каком-либо из стандартных курсов или монографий по теории меры. Поэтому мы приведем все полные доказательства. Однако в этих доказательствах мы будем свободно использовать (с соответствующими ссылками) понятия, которые не были введены в разделе D.I.

измеримых прямоугольников $\mathcal{A} \times \mathcal{B}(S)$ операции Суслина*). Так как операции счетного объединения и счетного пересечения представляют собой частные случаи операции Суслина, σ-алгебра произведения $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(S)$ содержится в классе всех $(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}(S))$-аналитических множеств в $\Omega \times S$. Понятие аналитического множества в явном виде нигде в этой книге не появляется, за исключением доказательства теоремы об измеримом селекторе. Однако смысл этой теоремы можно понять и не будучи знакомым с техническими деталями аналитических множеств. Поэтому, чтобы не затруднять чтение, мы сформулировали теорему только для соответствий с измеримыми графиками. Тем не менее следует заметить, что иногда бывает легче показать аналитичность графика соответствия, чем его измеримость.

Докажем теорему 1 только для случая $S = \mathbf{R}^m$ и укажем, как следует видоизменить доказательство для того, чтобы охватить общий случай (который в этой книге не понадобится).

Доказательство. Оно осуществляется в два этапа. Во-первых, покажем, что измеримый селектор существует при дополнительном предположении компактнозначности соответствия φ. Во-вторых, используя теорему Шоке о емкости, покажем, что для каждого соответствия φ, обладающего измеримым (аналитическим) графиком, существует такое компактнозначное соответствие ψ с измеримым графиком, что $\psi(\omega) \subset \varphi(\omega)$ п.в. в Ω.

Первый этап не сложен. Уже было показано (задача 1), что компактнозначное соответствие с измеримым графиком обладает селектором, измеримым почти везде. Фактически мы докажем несколько более сильную теорему о селекторе, так как в некоторых вопросах мера заранее не задается, и поэтому желательно, чтобы селектор существовал везде. Существование измеримого селектора везде возможно, если мы ограничимся соответствиями с замкнутыми значениями.

Они измеримы в том смысле, что множество

$$\varphi^{-1}(F) := \{\omega \in \Omega \mid \varphi(\omega) \cap F \neq \phi\}$$

измеримо для любого замкнутого множества F. Ясно, что в силу теоремы о проекциях (11) соответствие с измеримым графиком полного пространства с мерой в полное сепарабельное метрическое пространство всегда измеримо в этом смысле.

Лемма 1. *Пусть φ – соответствие с замкнутыми значениями из измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{A})$ в полное сепарабельное метрическое пространство S, причем*

$$\{\omega \in \Omega \mid \varphi(\omega) \cap F \neq \phi\} \in \mathcal{A}$$

для всех замкнутых подмножеств F из S. Тогда существует такое измеримое отображение f: $\Omega \to S$, что $f(\omega) \in \varphi(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $\{s_1, s_2, \ldots\}$ – счетное всюду плотное подмножество в S и пусть

$$B_n(i) = \{x \in S \mid d(x, s_i) \leqq 1/n\}, \quad i, n \in \mathrm{N},$$

есть замкнутый шар с центром в s_i и радиусом $1/n$.

*) Определение см., например, у Неве (1965), с. 9, или Мейера (1966), с. 34.

Построим по индукции такую последовательность (φ_n) измеримых соответствий φ_n, чтобы пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ было искомым селектором. Пусть $\varphi_0 := \varphi$, и определим по индукции

$$\varphi_{n+1}(\omega) := \varphi_n(\omega) \cap B_{n+1}(I_n(\omega)),$$

где

$$I_n(\omega) := \min\{i \in \mathbf{N} \mid \varphi_n(\omega) \cap B_{n+1}(i) \neq \phi\}.$$

Для всех $\omega \in \Omega$ последовательность $(\varphi_n(\omega))$ непустых замкнутых подмножеств множества S убывает, и их диаметр стремится к нулю. Поэтому (см. B.I, (19)) из полноты пространства S следует, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\omega)$ содержит ровно одну точку. Теперь положим

$$f(\omega) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Ясно, что функция f является везде селектором для φ. Остается показать измеримость f. Прежде всего покажем, что соответствие φ_n измеримо, т.е. что

$$\{\omega \in \Omega \mid \varphi_n(\omega) \cap F \neq \phi\} \in \mathcal{A}$$

для всех замкнутых множеств F в S. По предположению φ_0 измеримо. Предположим, что φ_n измеримо. Мы имеем

$$\{\omega \in \Omega \mid \varphi_{n+1}(\omega) \cap F \neq \phi\} =$$

$$= \{\omega \in \Omega \mid \varphi_n(\omega) \cap B_{n+1}(I_n(\omega)) \cap F \neq \phi\} =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} [\{\omega \in \Omega \mid \varphi_n(\omega) \cap B_{n+1}(i) \cap F \neq \phi\} \cap$$

$$\cap \{\omega \in \Omega \mid I_n(\omega) = i\}].$$

Но последнее множество принадлежит $\mathcal{A}$ по индуктивному предположению, а также ввиду того, что множество

$$\{\omega \in \Omega \mid I_n(\omega) = i\} = \bigcap_{j=1}^{i-1} [\{\omega \in \Omega \mid \varphi_n(\omega) \cap B_{n+1}(j) = \phi\} \cap$$

$$\cap \{\omega \in \Omega \mid \varphi_n(\omega) \cap B_{n+1}(i) \neq \phi\}]$$

принадлежит $\mathcal{A}$.

Метрическое пространство S полно. Поэтому нетрудно проверить, что для любого замкнутого множества мы имеем

$$f^{-1}(F) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{\omega \in \Omega \mid \varphi_n(\omega) \cap F \neq \phi\},$$

и, следовательно, $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$; это и доказывает измеримость селектора f (D.I, (3)), что и требовалось.

С л е д с т в и е. *В условиях леммы* 1, *существует такое счетное семейство измеримых функций* $\{f_n\}_{n\in \mathbf{N}}$ *из* $(\Omega,\mathcal{A})$ *в* S, *что*

$$\varphi(\omega) = \mathrm{cl}\{f_n(\omega) \mid n\in \mathbf{N}\} \text{ для всех } \omega \in \Omega.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{G_n\}_{n\in \mathbf{N}}$ – счетная база открытых множеств в S. Зададим соответствие φ_n, положив

$$\varphi_n(\omega) = \begin{cases} \mathrm{cl}\, G_n \cap \varphi(\omega), \text{ если } \omega \in \varphi^{-1}(\mathrm{cl}\, G_n), \\ \varphi(\omega), \text{ если } \omega \notin \varphi^{-1}(\mathrm{cl}\, G_n). \end{cases}$$

Применив лемму 1, мы получим измеримый селектор f_n для φ_n. Нетрудно проверить, что семейство $\{f_n\}$ обладает требуемыми свойствами.

При доказательстве леммы 2 будем использовать частный случай теоремы Шоке о емкости*), которую сейчас сформулируем.

Пусть $\mathcal{J}$ – произвольный класс подмножеств некоторого множества S. *Емкостью* называется функция χ: $2^S \setminus \phi \to \mathbf{R}$, обладающая следующими свойствами:

(I) Из $E \subset E'$ следует $\chi(E) \leqq \chi(E')$.

(II) Для любой возрастающей последовательности элементов (E_n) подмножеств из S имеет место $\chi(\bigcup_n E_n) = \sup_n \chi(E_n)$.

(III) Для любой убывающей последовательности элементов (E_n) из $\mathcal{J}$ имеет место $\chi(\bigcap_n E_n) = \inf_n \chi(E_n)$.

Теорема о емкости утверждает, что при некоторых предположениях относительно $\mathcal{J}$ емкость $\chi(A)$ "многих" подмножеств A в S можно аппроксимировать емкостями подмножеств A, принадлежащих $\mathcal{J}$.

Т е о р е м а о е м к о с т и. *Пусть* $\mathcal{J}$ – *класс подмножеств множества* S, *содержащий* ϕ *и замкнутый относительно конечного объединения и счетного пересечения. Тогда для любой емкости* χ *и для любого* $\mathcal{J}$*-аналитического множества* A *в* $\mathcal{J}$ *имеет место*

$$\chi(A) = \sup\{\chi(E) \mid E \subset A \text{ и } E\in \mathcal{J}\}.$$

Л е м м а 2. *Пусть* φ – *соответствие из* $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ *в* $\mathbf{R}^m$, *имеющее* $(\mathcal{A}\otimes \mathcal{B}^m)$*-аналитический график. Тогда существует такое компактнозначное соответствие* ψ *множества* $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ *в* $\mathbf{R}^m$, *имеющее измеримый график, что* $\psi(\omega) \subset \varphi(\omega)$ *почти везде в* Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S = \Omega \times \mathbf{R}^m$. Обозначим через $\mathcal{K}$ класс всех компактных подмножеств в $\mathbf{R}^m$. Пусть $\mathcal{J}$ – замыкание класса прямоугольников в $\mathcal{A} \times \mathcal{K}$ относительно операций конечного объединения и счетного пересечения. Заметим, что $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}^m$ и что классы $(\mathcal{A}\times\mathcal{K})$-аналитических и $(\mathcal{A}\times\mathcal{B}^m)$-аналитических множеств совпадают и содержат $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}^m$.

Зададим емкость χ на S, положив

$$\chi(G) := \nu^*(\mathrm{Pr}_\Omega G),$$

где символом ν^* обозначена внешняя мера ν, т.е.

$$\nu^*(H) = \inf\{\nu(F) \mid F \in \mathcal{A} \text{ и } H\subset F\} \text{ для всех } H\subset\Omega.$$

*) Доказательство см., например, у Мейера (1966).

Ясно, что χ обладает свойством (I) из определения емкости. Свойство (II) следует из цепочки равенств

$$\chi(\bigcup_n E_n) = \nu^*(\mathrm{Pr}_\Omega \bigcup_n E_n) = \nu^*(\bigcup_n \mathrm{Pr}_\Omega E_n) = \sup_n \nu^*(\mathrm{Pr}_\Omega E_n) =$$

$$= \sup_n \chi(E_n).$$

Для доказательства свойства (III) заметим прежде всего, что для каждой убывающей последовательности E_n в $\mathcal{J}$ имеет место

$$\bigcap_n \mathrm{Pr}_\Omega E_n = \mathrm{Pr}_\Omega \bigcap_n E_n.$$

Включение

$$\mathrm{Pr}_\Omega \bigcap_n E_n \subset \bigcap_n \mathrm{Pr}_\Omega E_n$$

тривиально. С другой стороны, пусть $\omega \in \bigcap_n \mathrm{Pr}_\Omega E_n$. Тогда

$$(\{\omega\} \times \mathbf{R}^m) \cap E_n \neq \phi, \quad n = 1, \ldots$$

Но так как $E_n \in \mathcal{J}$, это пересечение можно представить в виде $\{\omega\} \times K_n$, где K_n компактно. Последовательность (K_n) убывает, и, следовательно, $\bigcap_n (\{\omega\} \times K_n) \neq \phi$. Это и доказывает, что $\omega \in \mathrm{Pr}_\Omega \bigcap_n E_n$.

Так как пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ полно, для всех $E \in \mathcal{J}$ должно быть $\mathrm{Pr}_\Omega E \in \mathcal{A}$ (теорема о проекциях (11)). Следовательно,

$$\chi(\bigcap_n E_n) = \nu(\mathrm{Pr}_\Omega \cap E_n) = \nu(\bigcap_n \mathrm{Pr}_\Omega E_n) = \inf_n \nu(\mathrm{Pr}_\Omega E_n) = \inf \chi(E_n).$$

Здесь третье равенство следует из счетной аддитивности меры ν.

Применим теперь к графику G_φ соответствия φ теорему Шоке о емкости. Для каждого $\epsilon > 0$ существует такое $G_\epsilon \in \mathcal{J}$, что $G_\epsilon \subset G_\varphi$ и

$$\chi(G_\epsilon) := \nu^*(\mathrm{Pr}_\Omega G_\epsilon) = \nu(\mathrm{Pr}_\Omega G_\epsilon) \geqq \chi(G_\varphi) - \epsilon = 1 - \epsilon.$$

Множество

$$((\Omega \setminus \mathrm{Pr}_\Omega G_\epsilon) \times \mathbf{R}^m) \cap G_\varphi$$

будет тоже $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}^m)$-аналитическим; поэтому к нему применима теорема о емкости. Поступая таким образом и далее, мы получим последовательность $G_1, G_2, \ldots$ попарно непересекающихся множеств $G_n \subset G_\varphi$, принадлежащих $\mathcal{J}$ и обладающих тем свойством, что $\nu(\mathrm{Pr}_\Omega \bigcup_n G_n) = 1$. Так как все множества G_n принадлежат $\mathcal{J}$, они заведомо принадлежат и $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}^m$. Отсюда следует, что соответствие ψ с графиком $\bigcup_n G_n$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Замечание. Проведенное выше доказательство распространяется и на тот случай, когда S представляет собой счетное объединение компактных множеств. Если S – полное сепарабельное метрическое пространство, то S гомеоморфно некоторому борелевскому подмножеству S' гильбертова куба $H = [0, 1]^{\mathbf{N}}$. Мы можем отождествить борелевские подмножества в S с борелевскими подмножествами в S'. Обозначим через $\mathcal{K}_H$ множество всех компактных подмножеств в H. Тогда из $(\mathcal{A}\times\mathcal{B}(S))$-аналитичности G_φ следует его $(\mathcal{A}\times\mathcal{K}_H)$-аналитичность. Так как H – произвольное компактное метрическое пространство, доказательство, приведенное выше, охватывает общий случай леммы 2.

D.II.3. Некоторые понятия измеримости

Теорема об измеримом селекторе указывает, что существенный для теории интегрирования класс соответствий состоит из соответствий с аналитическим графиком. Однако для наших целей мы можем ограничиться в большинстве случаев более простыми результатами о соответствиях с измеримыми графиками.

Утверждение 1. *Пусть φ – соответствие с измеримым графиком измеримого пространства $(T,\mathcal{T})$ в $\mathbf{R}^m$. Тогда:*

(a) *если функция h: $T\to\mathbf{R}^m$ измерима, то соответствие $\omega\mapsto\varphi(\omega)+$ $+h(\omega)$ имеет измеримый график;*

(b) *если h – измеримое отображение из $(\Omega,\mathcal{A})$ в $(T,\mathcal{T})$, то соответствие $\varphi\circ h$: $\omega\mapsto\varphi(h(\omega))$ имеет измеримый график.*

Доказательство. (a) Функция f: $(\omega,x)\mapsto(\omega,x-h(\omega))$ пространства $\Omega\times\mathbf{R}^m$ в $\Omega\times\mathbf{R}^m$ является $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}^m)$-измеримой (D. I, (5) и (6)). Следовательно,

$$G_{\varphi+h}=f^{-1}(G_\varphi)\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}^m.$$

(b) Ввиду того что отображение g: $(\omega,x)\mapsto(h(\omega),x)$ пространства $\Omega\times\mathbf{R}^m$ в $T\times\mathbf{R}^m$ является измеримым (см. D. I, (5) и (6)), график $G_{\varphi\circ h}=$ $=g^{-1}(G_\varphi)$ также измерим, что и требовалось.

Утверждение 2. *Пусть φ – имеющее измеримый график соответствие пространства $(\Omega,\mathcal{A})$ в полное сепарабельное метрическое пространство S, а h – измеримая функция из S в сепарабельное метрическое пространство T. Тогда соответствие $h\circ\varphi$: $\omega\mapsto h(\varphi(\omega))$ имеет $(\mathcal{A}\times\mathcal{B}(M))$-аналитический график.*

Доказательство. Множество

$$G=\{(\omega,x,z)\in\Omega\times S\times M\mid x\in\varphi(\omega)\ \text{ и }\ z=h(x)\}$$

принадлежит $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(S)\otimes\mathcal{B}(M)$. Так как график $G_{h\circ\varphi}$ получен проектированием множества G на $\Omega\times M$ и так как S – полное сепарабельное метрическое пространство (см., например, Мейер (1966), т. 9, с. 34), график $G_{h\circ\varphi}$ будет $(\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}(M))$-аналитичным.

Следствие. *Пусть φ – соответствие с измеримым графиком пространства из $(\Omega,\mathcal{A})$ в $\mathbf{R}^m$. Тогда соответствие* $\operatorname{conv}\varphi$: $\omega\mapsto\operatorname{conv}\varphi$ *имеет $(\mathcal{A}\times$ $\times\mathcal{B}(M))$-аналитический график.*

Доказательство. Пусть

$$\Delta=\{(\xi_1,\ldots,\xi_{m+1})\mid\xi_i\geqq 0\ \text{ и }\ \sum_{i=1}^{m+1}\xi_i=1\}.$$

Соответствие

$$\psi:\omega\mapsto\varphi(\omega)\times\ldots\times\varphi(\omega)\times\{(\xi_1,\ldots,\xi_{m+1})\}$$

из пространства $(\Omega, \mathcal{A})$ в $\mathbf{R}^{m(m+1)}$ имеет измеримый график. Функция

$$h: (x_1, \ldots, x_{m+1} : \xi_1, \ldots, \xi_{m+1}) \to \sum_{i=1}^{m+1} \xi_i \cdot x_i$$

из $\mathbf{R}^{m(m+1)}$ в $\mathbf{R}^m$ непрерывна. Так как $\operatorname{conv} \varphi = h \circ \psi$, из утверждения 2 следует, что график $G_{\operatorname{conv} \varphi}$ аналитичен. Это и требовалось.

Утверждение 3. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ – *полное пространство с мерой,* S – *полное сепарабельное метрическое пространство,* φ – *некоторое соответствие из* S *в* R *с измеримым (аналитическим) графиком. Пусть, далее,* v – *некоторая измеримая функция из* S *в* $\mathbf{R}$. *Тогда функция* $\sup v(\varphi(\cdot))$ *из* Ω *в* $\mathbf{R}$:

$$\omega \mapsto \sup \{ v(x) \mid x \in \varphi(\omega) \},$$

измерима и отображение φ^v *из* Ω *в* S:

$$\omega \mapsto \{ x \in \varphi(\omega) \mid v(x) = \sup v(\varphi(\omega)) \},$$

имеет измеримый (аналитический) график.

Доказательство. Мы должны показать, что для всех $c \in \mathbf{R}$ множество

$$A := \{ \omega \in \Omega \mid \sup v(\varphi(\omega)) > c \}$$

принадлежит $\mathcal{A}$. Так как

$$A = \operatorname{Pr}_\Omega \{ (\omega, x) \in G_\varphi \mid v(x) > c \}$$

и из предположений, сделанных относительно φ и v, следует, что

$$\{ (\omega, x) \in G_\varphi \mid v(x) > c \} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(S),$$

теорема о проекциях (D. I, (11)) влечет $A \in \mathcal{A}$.

Вторая часть утверждения следует отсюда уже непосредственно. Функция

$$(\omega, x) \mapsto v(x) - \sup v(\varphi(\omega))$$

$(\mathcal{A} \times \mathcal{B}(S))$-измерима (D. I, (5) и (6)). Поэтому

$$V = \{ (\omega, x) \in \Omega \times S \mid v(x) = \sup v(\varphi(\omega)) \} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(S).$$

Следовательно,

$$G_{\varphi^v} = G_\varphi \cap V \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(S),$$

что и требовалось.

Следствие. *Пусть* φ – *принимающее замкнутые значения и имеющее замкнутый график соответствие, которое отображает полное пространство с мерой* $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ *в* $\mathbf{R}^m$. *Тогда график соответствия* $\operatorname{conv} \varphi$ *измерим.*

Доказательство. Пусть

$$\varphi^k(\omega) = \{ x \in \varphi(\omega) \mid |x| \leqq k \}, \quad k = 1, \ldots$$

Нетрудно проверить, что

$$\operatorname{conv} \varphi(\omega) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{conv} \varphi^k(\omega).$$

Для каждого $v \in \mathbf{R}^m$ построим соответствие H_v из Ω в $\mathbf{R}^m$:

$$H_v(\omega) := \{ x \in \mathbf{R}^m \mid v \cdot x \leqq \sup v \cdot \varphi^k(\omega) \} .$$

Согласно утверждению 3, функция $\omega \mapsto \sup v \cdot \varphi^k(\omega)$ измерима, и, следовательно, график H_v измерим. Из того, что

$$\operatorname{conv} \varphi^k(\omega) = \bigcap_{v \in D} H_v(\omega),$$

где через D обозначено счетное всюду плотное подмножество в $\mathbf{R}^m$ (C.II, (12)), следует, что график каждого из соответствий $\operatorname{conv}\varphi^k$ ($k = 1, \ldots$) измерим; следовательно, график соответствия $\operatorname{conv} \varphi$ также измерим.

Утверждение 4. *Пусть φ – соответствие из $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в полное сепарабельное метрическое пространство S. Тогда*:

(a) *если $G_\varphi \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(S)$, то*

$$\{ \omega \in \Omega \mid \varphi(\omega) \cap B \neq \phi \} \in \mathcal{A} \quad \textit{для всех } B \in \mathcal{B}(S);$$

(b) *если для каждого открытого подмножества B из S множество $\{ \omega \in \Omega \mid \varphi(\omega) \cap B \neq \phi\}$ принадлежит $\mathcal{A}$, то график соответствия $\overline{\varphi}: \omega \mapsto \overline{\varphi(\omega)}$ принадлежит $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(S)$.*

Доказательство. Часть (a) следует из теоремы о проекциях (D. I, (11)), так как

$$\{\omega \in \Omega \mid \varphi(\omega) \cap B \neq \phi \} = \Pr_\Omega(G_\varphi \cap (\Omega \times B)).$$

Для того чтобы доказать (b), рассмотрим счетное всюду плотное подмножество D в S. Нетрудно проверить, что

$$G_{\overline{\varphi}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{z \in D} (\{ \omega \in \Omega \mid \operatorname{dist}(s, \varphi(\omega)) < 1/n \} \times$$

$$\times \{ y \in S \mid d(y, z) < 1/n \}).$$

Так как множество

$$\{ \omega \in \Omega \mid \operatorname{dist}(z, \varphi(\omega)) < 1/n \} = \varphi^{-1}\{ x \in S \mid d(z, x) < 1/n \}$$

по предположению принадлежит $\mathcal{A}$, то график соответствия $\overline{\varphi}$ принадлежит $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(S)$, а это и требовалось.

Замечание. Отметим, что если $\varphi^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ для любого замкнутого подмножества F множества S, то $\varphi^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ и для любого открытого подмножества G из S. Обратное, однако, может и не иметь места.

D.II. 4. Свойства интеграла $\int \varphi$

Соответствие φ из пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в $\mathbf{R}^m$ называется *интегрально ограниченным,* если существует такая интегрируемая функция g из Ω в $\mathbf{R}^m_+$, что для всех $\omega \in \Omega$

$$-g(\omega) \leqq \varphi(\omega) \leqq g(\omega).$$

Теорема 2. *Если соответствие φ из пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в $\mathbf{R}^m$ имеет измеримый график и интегрально ограничено, то $\int \varphi d\nu \neq \phi$.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть φ – соответствие из неатомического пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в $\mathbf{R}^m$; тогда интеграл $\int \varphi d\nu$ есть выпуклое множество в $\mathbf{R}^m$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z_1, z_2 \in \int\varphi$ и $0 < \lambda < 1$. Существуют такие интегрируемые функции $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_\varphi$, что $z_1 = \int f_1$ и $z_2 = \int f_2$. Из теоремы Ляпунова (см. D.I, (15)) следует, что множество

$$\{(\int_E f_1 d\nu, \int_E f_2 d\nu) \in \mathbf{R}^{2m} \mid E \in \mathcal{A}\}$$

выпукло. Поскольку $(0, 0)$ и (z_1, z_2) принадлежат этому множеству, существует такое множество $E \in \mathcal{A}$, что

$$(\lambda z_1, \lambda z_2) = (\int_E f_1, \int_E f_2).$$

Определим теперь функцию $f \in \mathcal{L}_\varphi$, положив

$$f(\omega) = \begin{cases} f_1(\omega), & \text{если } \omega \in E, \\ f_2(\omega), & \text{если } \omega \notin E. \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$\int f = \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2,$$

что и требовалось.

С л е д с т в и е. *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ – неатомическое пространство с мерой, S – подмножество в $\mathbf{R}^m$ и $\varphi(\omega) = S$ для всех $\omega \in \Omega$. Тогда* $\int \varphi d\nu = \operatorname{conv} S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 3 следует, что $\operatorname{conv} S \subset \int\varphi d\nu$. С другой стороны, хорошо известно (это легко доказать, проводя индукцию по размерности $\mathbf{R}^m$), что $\int f \in \operatorname{conv} S$ для всех таких f, что $f(\omega) \in S$ почти везде на Ω. Следствие доказано.

У т в е р ж д е н и е 5. *Пусть φ – соответствие из неатомического пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в $\mathbf{R}^m$. Тогда множество*

$$Z := \{\int_E f d\nu \mid f \in \mathcal{L}_\varphi,\ E \in \mathcal{A},\ \nu(E) > 0\}$$

выпукло в $\mathbf{R}^m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z_1, z_2 \in Z$, т.е. $z_i = \int_E f_i$, где $f_i \in \mathcal{L}_\varphi$ и $\nu(E_i) > 0$ $(i = 1, 2)$. Надо показать, что $z = \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2 \in Z$ для $0 < \lambda < 1$. Из теоремы Ляпунова (см. D.I, (15)) следует, что множество

$$\{\int_E f_1 d\nu \mid E \subset E_1 \setminus E_2,\ E \in \mathcal{A}\}$$

выпукло. Таким образом, существует такое подмножество $B_1 \subset E_1 \setminus E_2$, $B_1 \in \mathcal{A}$, что $\int_{B_1} f_1 = \lambda \int_{E_1 \setminus E_2} f_1$. Аналогично существует такое подмножество $B_2 \subset E_2 \setminus E_1$, $B_2 \in \mathcal{A}$, что

$$\int_{B_2} f_2 = (1 - \lambda) \int_{E_2 \setminus E_1} f_2.$$

Снова из теоремы Ляпунова следует, что множество

$$\{(\int_E f_1 \cdot \int_E f_2) \in \mathbf{R}^{2m} \mid E \subset E_1 \cap E_2 E \in \mathcal{A}\}$$

выпукло. Значит, существует такое подмножество $B_3 \subset E_1 \cap E_2$, что

$$\int_{B_3} f_1 = \lambda \int_{E_1 \cap E_2} f_1, \quad \int_{B_3} f_2 = \lambda \int_{E_1 \cap E_2} f_2.$$

Положим теперь

$$f(\omega) = \begin{cases} f_1(\omega), & \text{если} \quad \omega \in B_1 \cup B_3, \\ f_2(\omega), & \text{если} \quad \omega \notin B_1 \cup B_3, \end{cases}$$

$$B = B_1 \cup B_2 \cup (E_1 \cap E_2).$$

Тогда

$$\int_B f = \int_{B_1} f_1 + \int_{B_2} f_2 + \int_{B_3} f_1 + \int_{(E_1 \cap E_2)\setminus B_3} f_2 =$$

$$= \lambda \int_{E_1} f_1 + (1-\lambda) \int_{E_2} f_2 = z.$$

Это завершает доказательство.

Утверждение 6. *Пусть φ – соответствие пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в $\mathbf{R}^m$. Если график φ измерим и $\int\varphi \neq \phi$, то для всех $p \in \mathbf{R}^m$ имеет место равенство*

$$\sup\{p \cdot z \mid z \in \int\varphi\} = \int \sup\{p \cdot x \mid x \in \varphi(\cdot)\}.$$

Доказательство. Ясно, что левая часть этого равенства не больше правой. Из утверждения 3 следует, что функция $\omega \mapsto \sup p \cdot \varphi(\omega)$ является $\mathcal{A}_\nu$-измеримой. Поскольку мы предполагаем, что φ имеет интегрируемый селектор, правая часть равенства определена (причем она может быть равна $+\infty$).

Рассмотрим вещественное число $\alpha < \int s$, где $s(\omega) = \sup p \cdot \varphi(\omega)$. Мы должны показать, что существует такая функция $f \in \mathcal{L}_\varphi$, что $\alpha < p \cdot \int f$. Для этого возьмем интегрируемый селектор $h \in \mathcal{L}_\varphi$ и рассмотрим для любого числа n усеченное соответствие φ_n:

$$\varphi_n(\omega) = \{x \in \varphi(\omega) \mid |x - h(\omega)| \leqq n\}.$$

Ясно, что график φ_n измерим. Следовательно, по утверждению 3 функция $s_n: \omega \mapsto \sup p \cdot \varphi_n(\omega)$ измерима. Кроме того, она интегрируема, поскольку интегрируем селектор h. Ввиду того что $(s_n(\omega)) \uparrow s(\omega)$, по теореме о монотонной сходимости (см. D.I, (18)) должно быть $\int s_n \to \int s$. Следовательно, для достаточно больших n мы имеем $\alpha < \int s_n$. Поэтому существует такая интегрируемая функция g из Ω в $\mathbf{R}$, что $\alpha < \int g$ и $g(\omega) < s_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Пусть

$$\psi(\omega) = \{x \in \varphi_n(\omega) \mid p \cdot x > g(\omega)\}.$$

Ясно, что $\psi(\omega) \neq \phi$, и график соответствия ψ измерим. Следовательно, по теореме 1 существует измеримый селектор f соответствия ψ, а потому и соответствия φ, который даже интегрируем. Поскольку $g(\omega) < p \cdot f(\omega)$, мы получаем, что $\int g < p \cdot \int f$, и, следовательно, $\alpha < p \cdot \int f$, что и требовалось.

Теорема 4. *Пусть φ – соответствие пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в $\mathbf{R}^m_+$ с измеримым графиком. Тогда*

$$\operatorname{conv} \int \varphi d\nu = \int \operatorname{conv} \varphi d\nu.$$

В частности, для неатомического пространства с мерой имеет место равенство

$\int \varphi d\nu = \int \operatorname{conv} \varphi d\nu.$

Доказательство. Эту теорему мы будем доказывать индукцией по размерности $\mathbf{R}^m$. Ясно, что теорема справедлива при $m = 0$. Покажем сначала, что

$$\int \operatorname{conv} \varphi = \phi \text{ тогда и только тогда, когда } \operatorname{conv} \int \varphi = \phi. \tag{1}$$

Если $\int \operatorname{conv} \varphi = \phi$, то $\int \varphi = \phi$ и $\operatorname{conv} \int \varphi = \phi$. Предположим теперь, что $\int \operatorname{conv} \varphi \neq \phi$. Пусть f – интегрируемый селектор соответствия $\operatorname{conv} \varphi$ и $v \in \mathbf{R}^m$, $v > 0$. Рассмотрим множество

$$\psi(\omega) = \{ x \in \varphi(\omega) \mid v \cdot x \leqq v \cdot f(\omega) \}.$$

Поскольку $f(\omega) \in \operatorname{conv} \varphi(\omega)$, $\psi(\omega) \neq \phi$ п.в. в Ω. График соответствия ψ измерим; поэтому (см. D.II, теорема 1) существует измеримый селектор h соответствия ψ. Так как селектор f интегрируем, $v > 0$ и φ положительно, селектор h также интегрируем, и, следовательно, $\int \varphi \neq \phi$.

В оставшейся части доказательства будем предполагать, что $\int \varphi \neq \phi$. Покажем, что

$$\operatorname{conv} \int \varphi \text{ и } \int \operatorname{conv} \varphi \text{ имеют одно и то же замыкание.} \tag{2}$$

Для каждого $v \in \mathbf{R}^m$ имеют место неравенства и равенство

$$\sup v \cdot \int \varphi \leqq \sup v \cdot \int \operatorname{conv} \varphi \leqq \int \sup v \cdot \varphi = \sup v \cdot \int \varphi.$$

Действительно, оба неравенства тривиальны, а равенство следует из утверждения 6. Значит, для каждого $v \in \mathbf{R}^m$ мы имеем $\sup v \cdot \int \operatorname{conv} \varphi = \sup v \cdot \operatorname{conv} \int \varphi$, что в соответствии с C.II (12) доказывает свойство (2), так как оба множества выпуклы.

Для каждого подмножества X в $\mathbf{R}^m$ и каждого $v \in \mathbf{R}^m$ положим

$$X^v := \{ x \in X \mid v \cdot x = \sup v \cdot X \}.$$

Остается показать, что для каждого $v \in \mathbf{R}^m$ выполняется равенство

$$\left(\int \operatorname{conv} \varphi\right)^v = \left(\operatorname{conv} \int \varphi\right)^v.$$

Используя теорему об измеримом селекторе, легко доказать следующее: если ψ – соответствие $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в $\mathbf{R}^m$ с аналитическим графиком и $\int \psi \neq \phi$, то для каждого $v \in \mathbf{R}^m$ будет $(\int \psi)^v \neq \phi$ тогда и только тогда, когда

$$\psi^v(\omega) \neq \phi \text{ п.в. в } \Omega \text{ и } \int \psi^v = \left(\int \psi\right)^v.$$

Мы хотим применить этот факт к соответствиям φ и $\operatorname{conv} \varphi$. Поскольку по следствию из утверждения 2 соответствие $\operatorname{conv} \varphi$ имеет аналитический, но не обязательно измеримый график, мы должны пользоваться теоремой об измеримом селекторе для аналитических множеств. (Если соответствие φ замкнутозначно, то, согласно следствию из утверждений 3, $\operatorname{conv} \varphi$ имеет измеримый график.) Кроме того, легко проверить, что для каждого непустого подмножества X из $\mathbf{R}^m$ имеет место равенство $(\operatorname{conv} X)^v = \operatorname{conv}(X^v)$. Следовательно,

$$\left(\int \operatorname{conv} \varphi\right)^v = \int (\operatorname{conv} \varphi)^v = \int \operatorname{conv} (\varphi)^v$$

и аналогично

$$(\operatorname{conv}\textstyle\int\varphi)^v = \operatorname{conv}(\textstyle\int\varphi)^v = \operatorname{conv}\textstyle\int\varphi^v.$$

Теперь остается показать, что

$$\textstyle\int\operatorname{conv}(\varphi^v) = \operatorname{conv}\textstyle\int\varphi^v. \tag{3}$$

Так как график отношения φ^v измерим (утверждение 3), из выражения (1) следует, что $\int\operatorname{conv}\varphi^v = \phi$ тогда и только тогда, когда $\int\varphi^v = \phi$. Следовательно, в оставшейся части доказательства мы можем предполагать, что $\int\varphi^v \neq \phi$.

Рассмотрим гиперплоскость

$$H = \{x \in \mathbf{R}^m \mid v \cdot x = 0\}.$$

Существует такая координатная ось L, скажем первая, которая не содержится в H. Теперь рассмотрим оператор проектирования Q на H параллельно оси L (рис. 1.7).

Пусть h – функция на Ω со значениями в $\mathbf{R}^m$, задаваемая как $\omega \mapsto h(\omega) := x - Qx$ для некоторого $x \in \varphi^v(\omega)$. Эта функция h определена и измерима. Ясно, что $\varphi^v(\omega) = Q\varphi^v(\omega) + h(\omega)$. Легко можно проверить, что

$$\operatorname{conv}\textstyle\int\varphi^v = \operatorname{conv}\textstyle\int(Q\varphi^v + h) = \operatorname{conv}\textstyle\int Q\varphi^v + \textstyle\int h,$$

$$\textstyle\int\operatorname{conv}(\varphi^v) = \textstyle\int\operatorname{conv}(Q\varphi^v + h) = \textstyle\int\operatorname{conv}(Q\varphi^v) + \textstyle\int h.$$

Следовательно, для того чтобы доказать (3), достаточно установить равенство

$$\textstyle\int\operatorname{conv}(Q\varphi^v) = \operatorname{conv}\textstyle\int Q\varphi^v. \tag{4}$$

Но это следует из индуктивного предположения. Действительно, векторы $Qe_2, \ldots, Qe_m$ образуют базис гиперплоскости H (здесь e_h обозначает h-й орт в $\mathbf{R}^m$). Относительно этого базиса соответствие $Q\varphi^v$ становится соответствием $\mathring{\varphi}^v$ из Ω в $\mathbf{R}^{m-1}$. Соответствие $\mathring{\varphi}^v$ положительно, поскольку φ положительно, и имеет измеримый график, так как $Q\varphi^v$ имеет измеримый график. Поэтому по индуктивному предположению мы получаем, что $\operatorname{conv}\int\mathring{\varphi}^v = \int\operatorname{conv}\mathring{\varphi}^v$.

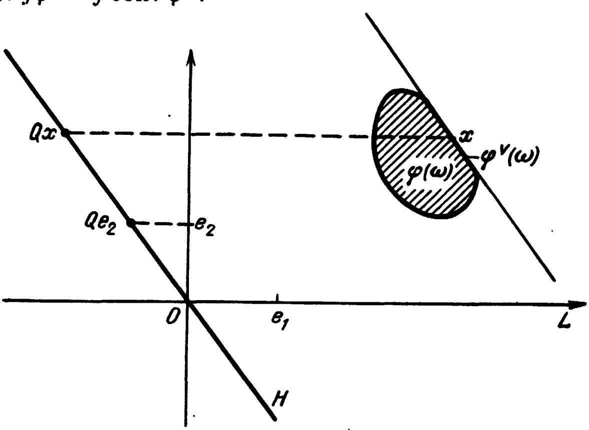

Рис. 1.7

Пусть T – линейное и инъективное отображение $\mathbf{R}^{m-1}$ в $\mathbf{R}^m$, определяемое как $T(\xi_2, \ldots, \xi_m) = \Sigma \xi_h Q e_h$. Ясно, что $Q\varphi^v(\omega) = T\dot{\varphi}^v(\omega)$. Легко можно показать, что

$$\int \operatorname{conv}(T \circ \dot{\varphi}^v) = T \int \operatorname{conv} \dot{\varphi}^v = T \operatorname{conv} \int \dot{\varphi}^v = \operatorname{conv} \int T \circ \dot{\varphi}^v.$$

Таким образом, мы получили равенство (4), что и завершает доказательство.

Второе утверждение теоремы 4 немедленно следует из доказанного и из теоремы 3.

Т е о р е м а 5. *Пусть h – измеримое отображение пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в измеримое пространство $(T, \mathcal{J})$, а φ – такое соответствие T в $\mathbf{R}^m$ с измеримым графиком, что $\varphi(t)$ замкнуто, выпукло и не содержит прямой. Тогда*

$$\int_\Omega \varphi \circ h d\nu = \int_T \varphi d(\nu \circ h^{-1}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если f – измеримый селектор φ, то $f \circ h$ есть измеримый селектор $\varphi \circ h$. Поэтому по формуле замены переменной (см. D.I, (36)) мы получаем, что $\int \varphi d(\nu \circ h^{-1}) \subset \int \varphi \circ h d\nu$. Для того чтобы доказать обратное включение, мы должны установить, что для каждого $x \in \int \varphi \circ h d\nu$ можно указать интегрируемый селектор $g \in \mathcal{L}_{\varphi \circ h}$ с $x = \int g$, который имеет вид $g = f \circ h$, где f – измеримая функция из T в $\mathbf{R}^m$. Согласно утверждению D.I, (8), существует такая измеримая функция $f\colon T \to \mathbf{R}^m$, что $g = f \circ h$ тогда и только тогда, когда селектор g является $h^{-1}(\mathcal{J})$-измеримым. Следовательно, остается показать, что для каждого $g \in \mathcal{L}_{\varphi \circ h}$ существует $h^{-1}(\mathcal{J})$-измеримый селектор соответствия $\varphi \circ h$ с тем же интегралом. Но такой селектор легко находится. Пусть $\mathcal{K} = h^{-1}(\mathcal{J})$; рассмотрим условное математическое ожидание*) $\mathbf{E}^{\mathcal{K}} g$ от g при заданной σ-алгебре $\mathcal{K}$ (условное математическое ожидание задается покоординатно). По определению $\mathbf{E}^{\mathcal{K}} g$ есть $\mathcal{K}$-измеримая функция из Ω в $\mathbf{R}^m$ и $\int \mathbf{E}^{\mathcal{K}} g d\nu = \int g d\nu$. Таким образом, мы должны показать, что функция $\mathbf{E}^{\mathcal{K}} g$ является селектором соответствия $\varphi \circ h$. Пусть $\psi = \varphi \circ h$. Так как $g \in \mathcal{L}_\psi$, мы получаем, что для каждого $v \in \mathbf{R}^m$ почти везде в Ω выполняется неравенство

$$\inf v \cdot \psi(\omega) \leqq v \cdot g(\omega).$$

График ψ принадлежит $\mathcal{K} \otimes \mathcal{B}^m$ (утверждение 1 (b)); следовательно, согласно утверждению 3, функция $\inf v \cdot \psi(\cdot)$ $\mathcal{K}$-измерима и, таким образом, почти везде равна $\mathcal{K}$-измеримой функции. Следовательно, почти везде в Ω (в зависимости от v) мы имеем

$$\inf v \cdot \psi(\omega) = (\mathbf{E}^{\mathcal{K}} \inf v \cdot \psi)(\omega) \leqq (\mathbf{E}^{\mathcal{K}} v \cdot g)(\omega) = v \cdot (\mathbf{E}^{\mathcal{K}} g)(\omega).$$

Таким образом, если через Q обозначить счетное плотное подмножество в $\mathbf{R}^m$, то необходимо показать, что почти везде в Ω

$$\inf v \cdot \psi(\omega) \leqq v \cdot (\mathbf{E}^{\mathcal{K}} g)(\omega) \quad \text{для всех} \quad v \in Q.$$

---

*) Определение и свойства условного математического ожидания см. Невё Ж, (1965), IV.3, с. 173.

Так как множество $\psi(\omega)$ замкнуто, выпукло и не содержит прямой, согласно утверждению С.II, (12), $(\mathbf{E}^{\mathscr{H}}g)(\omega) \in \psi(\omega)$ почти везде в Ω, что и требовалось.

Пусть (φ_n) – последовательность соответствий $(\Omega, \mathscr{A}, \nu)$ в $\mathbf{R}^m$. Рассмотрим отношение $\mathrm{Ls}(\varphi_n)$: $\omega \mapsto \mathrm{Ls}(\varphi_n(\omega))$ и исследуем связь между множествами $\mathrm{Ls}(\int \varphi_n)$ и $\int \mathrm{Ls}(\varphi_n)$.

Теорема 6. *Пусть (φ_n) – такая последовательность соответствий пространства $(\Omega, \mathscr{A}, \nu)$ в $\mathbf{R}^m_+$, что существует последовательность (g_n) функций из Ω в $\mathbf{R}^m_+$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(I) $\varphi_n(\omega) \leqq g_n(\omega)$ *почти везде в* Ω;

(II) *последовательность* (g_n) *равномерно интегрируема, а множество* $\{g_n(\omega)\}_{n=1,2,\ldots}$ *почти везде в* $\mathbf{R}^m$ *ограничено.*

Тогда

$$\mathrm{Ls}(\int \varphi_n) \subset \int \mathrm{Ls}(\varphi_n).$$

Замечание. Последовательность (g_n) удовлетворяет условию (II), если почти везде в Ω существует $\lim_n g_n(\omega)$ и $\lim_n \int g_n = \int \lim_n g_n$ (см. (42)). Ясно, что если все φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничены одной и той же интегрируемой функцией g, то условия теоремы 6 выполнены. Однако для целей гл. 1 и 2 нам необходим более общий результат.

Доказательство. Пусть $z = \mathrm{Ls}(\int \varphi_n)$, т.е. существует такая последовательность $(z_{n_q})_{q=1,\ldots}$, сходящаяся к z, что $z_{n_q} = \int f_q$, где $f_q(\omega) \in \varphi_{n_q}(\omega)$, $q = 1, \ldots$ По условиям (I) и (II) последовательность f_q равномерно интегрируема и множество $\{f_q(\omega)\}_{q=1,\ldots}$ ограничено. Мы должны показать, что существует интегрируемый селектор f соответствия $\omega \mapsto \mathrm{Ls}(f_n(\omega))$, удовлетворяющий дополнительному условию $\int f = \lim_q \int f_q$. Этот шаг доказательства имеет самостоятельный интерес и поэтому будет оформлен в виде леммы.

Лемма 3 (лемма Фату в m-мерном пространстве). *Пусть (f_n) – последовательность интегрируемых функций на $(\Omega, \mathscr{A}, \nu)$ со значениями в $\mathbf{R}^m_+$. Предположим, что существует предел $\lim_n \int f_n$. Тогда существует такая интегрируемая функция $f: \Omega^n \to \mathbf{R}^m_+$, что:*

(a) $f(\omega) \in \mathrm{Ls}(f_n(\omega))$ *почти везде в* Ω;

(b) $\int f \leqq \lim_n \int f_n$.

Кроме того, если последовательность (f_n) равномерно интегрируема и если почти везде в Ω множество $\{f_n(\omega)\}_{n=1,\ldots}$ ограничено, то существует такой селектор f соответствия $\mathrm{Ls}(f_n)$, что

$$\int f = \lim_n \int f_n.$$

Если для любой функции $f: \Omega \to \mathbf{R}^m$, удовлетворяющей условиям (a) *и* (b), *имеет место равенство*

$$\int f = \lim \int f_n,$$

то последовательность (f_n) равномерно интегрируема.

Доказательство. Предположим сначала, что пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ является неатомическим, а мера ν – полной; как будет показано в конце доказательства, общий случай легко сводится к этому.

Обозначим через $L_p^m(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ (или для краткости через L_p^m) m-кратное произведение линейных пространств $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$, где $p = 1, \infty$ (см. Данфорд, Шварц, 1962, IV.8), и аналогично через $ba^m(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ (или для краткости через ba^m) m-кратное произведение линейных пространств $ba(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ (см. Данфорд, Шварц, 1962, IV.8, с. 322).

Известно, что пространство, двойственное к банахову пространству L_∞^m, где топология в каждом пространстве-сомножителе задается нормой-супремумом, изоморфно пространству ba^m. Топологию в ba^m, где каждое пространство-сомножитель ba снабжено слабой топологией $\sigma(ba, L_\infty)$, обозначим через $\sigma^m(ba, L_\infty)$. Наконец, топологию в L_1^m, где каждое пространство-сомножитель L_1 снабжено слабой топологией $\sigma(L_1, L_\infty)$, обозначим через $\sigma^m(L_1, L_\infty)$.

Пусть

$$\mu_n(E) = \int_E f_n d\nu, \quad E \in \mathcal{A}, \quad n = 1, \ldots$$

Ясно, что мера μ_n со значениями в $\mathbf{R}_+^m$ принадлежит ba^m. Так как последовательность $(\mu_n(\Omega))_n$ ограничена, по теореме Алаоглу. (см. Данфорд, Шварц, 1962, V.4, теорема 2, с. 459) множество $\{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$ в ba^m условно компактно в топологии $\sigma^m(ba, L_\infty)$. Следовательно, последовательность (μ_n) имеет предельную точку $\mu \in ba^m$ в топологии $\sigma^m(ba, L_\infty)$. Ясно, что $\mu \geqq 0$ и

$$\mu(\Omega) = \lim_n \int f_n d\nu. \tag{1}$$

Известно (см. Иосида, Хьюитт, 1952, теорема 1.23, с. 53), что положительная мера $\mu \in ba^m$ может быть представлена в виде $\mu = \mu_c + \mu_p$, где μ_c, $\mu_p \in ba^m$, $\mu_c, \mu_p \geqq 0$, причем мера μ_c счетно-аддитивна, а мера μ_p чисто конечно-аддитивна. Ясно, что каждая координата меры μ_c абсолютно непрерывна относительно меры ν. Следовательно, существует производная Радона – Никодима $g\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ счетно-аддитивной части μ_c относительно ν. Согласно (1), мы имеем

$$\int g d\nu = \mu_c(\Omega) \leqq \mu(\Omega) = \lim_n \int f_n d\nu.$$

Таким образом,

$$\int g d\nu \leqq \lim_n \int f_n d\nu. \tag{2}$$

Так как $\mu_p(\Omega)$ может быть больше 0, функция g, вообще говоря, не является предельной точкой последовательности (f_n) в топологии $\sigma^m(L_1, L_\infty)$. Однако существует такое счетное разбиение $(B_i)_{i \in \mathbf{N}}$ множества Ω, что $\mu_p(B_i) = 0$ для каждого $i \in \mathbf{N}$ (см. Иосида, Хьюитт, 1952, теорема 1.22, с. 52). Отсюда следует, что для каждого $i \in \mathbf{N}$ в $L_1^m(B_i, \mathcal{A} \cap B_i \nu|_{B_i})$ сужение $g|_{B_i}$ является предельной точкой в топологии $\sigma^m(L_1, L_\infty)$ для последовательности сужений $(f_n|_{B_i})$. Зафиксируем теперь множество B_i и рассмотрим для каждого $n = 1, \ldots$ множество $A_n = \{f_n|_{B_i}, f_{n+1}|_{B_i}, \ldots\}$. Сужение $g|_{B_i}$ является предельной точкой каждого множества A_n в топологии $\sigma^m(L_1, L_\infty)$ и, следовательно, его выпуклой оболочки conv A_n. Но так как сильно замкнутое и выпуклое множество является также слабо замкнутым (см. Данфорд, Шварц, 1962, V.3, теорема 13, с. 457), существует последовательность (g_n), где $g_n \in \operatorname{conv} A_n$, сильно сходящаяся к $g|_{B_l}$. Следовательно, существует подпоследовательность последовательности (g_n), сходящаяся к $g|_{B_l}$ почти везде (см. Данфорд, Шварц, 1962, III.3.6, с. 137, и III.6.13 (a), с. 167). Следовательно, не умаляя общности, можно предположить, что почти везде в B_l

$$\lim_n g_n(\omega) = g(\omega).$$

Покажем теперь, что почти везде в Ω

$$g(\omega) \in \operatorname{conv} \operatorname{Ls}(f_n(\omega)) + \mathbf{R}^m_+. \tag{3}$$

Так как

$$g_n(\omega) \in \operatorname{conv}\{f_n(\omega), f_{n+1}(\omega), \ldots\},$$

по теореме Каратеодори (см. C.II, (3)) должно быть

$$g_n(\omega) = \sum_{i=0}^{m} \delta_n^i y_n^i,$$

где

$$\delta_n^i \geqq 0, \quad \sum_{i=0}^{m} \delta_n^i = 1,$$

$$\{y_n^0, \ldots, y_n^n\} \subset \{f_n(\omega), f_{n+1}(\omega), \ldots\}.$$

При доказательстве выражения (3) мы можем без потери общности предполагать, что последовательности $(\delta_n^i)_n$ $(i = 0, \ldots, m)$ сходящиеся. Итак, пусть $\lim_n \delta_n^i = \delta^i$. Ясно, что $\delta^i \geqq 0$ и $\sum_{i=0}^{m} \delta^i = 1$.

Так как $\delta_n^i \geqq 0$, $y_n^i \geqq 0$ и $\lim_n g_n(\omega) = g(\omega)$, последовательности $(\delta_n^i y_n^i)_{n=1,\ldots}$ $(i = 0, \ldots, m)$ ограничены, и, следовательно, снова без потери общности можно предположить, что существуют пределы $\lim_n \delta_n^i y_n^i$ $(i = 0, \ldots, m)$. Таким образом, из $\delta^i > 0$ следует, что существует $\lim_n y_n^i$.

Теперь

$$g(\omega) = \lim_n g_n(\omega) = \lim_n \sum_{i=0}^{m} \delta_n^i y_n^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \lim_n \delta_n^i y_n^i \geqq \sum_{\substack{i=0 \\ \delta^i > 0}}^{m} \delta^i \lim_n y_n^i. \tag{4}$$

По определению y_n^i

$$\lim y_n^i \in \operatorname{Ls}(f_n(\omega)).$$

Следовательно,

$$g(\omega) \geqq \sum_{\substack{i=0 \\ \delta^i > 0}}^{m} \delta^i \lim_n y_n^i \in \operatorname{conv} \operatorname{Ls}(f_n(\omega)),$$

что доказывает (3).

Преобразуем теперь функцию g, обладающую свойствами (1) и (2), в функцию, которая обладает требуемыми свойствами. Рассмотрим множество

$$C = \{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbf{R}^m \mid x \in \operatorname{conv} \operatorname{Ls}(f_n(\omega)) \text{ и } x \leqq g(\omega)\}.$$

Из следствия утверждения 3 вытекает, что множество C принадлежит $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$, а из (3) следует, что $\nu(\operatorname{proj}_\Omega C) = 1$. Таким образом, по теореме об измеримом селекторе (см. D.II, теорема 1) существует такая измеримая функция f': $\Omega \to \mathbf{R}^m$, что $(\omega, f'(\omega)) \in C$ почти везде в Ω, т.е. почти везде в Ω

$$f'(\omega) \in \operatorname{conv} \operatorname{Ls}(f_n(\omega)), \tag{5}$$

$$\int f' d\nu \leqq \lim_n \int g_n d\nu.$$

Наконец, так как пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ неатомическое, по теореме 4 имеем

$$\int \operatorname{Ls}(f_n) = \int \operatorname{conv} \operatorname{Ls}(f_n).$$

Следовательно, существует такая интегрируемая функция f: $\Omega \to \mathbf{R}^m$, что $f(\omega) \in \operatorname{Ls}(f_n(\omega))$ почти везде в Ω и $\int f d\nu \leqq \lim_n \int f_n d\nu$.

Докажем, наконец, теорему для произвольного пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$. Существует счетное измеримое разбиение Ω, $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$, где каждое Ω_k является либо атомом, либо неатомическим (см. D.I, (12)). Так как предполагается, что существует $\lim \int_\Omega f_n d\nu$, и так как $f_n \geqq 0$, существует такой вектор $b \in \mathbf{R}^m$, что для каждого $k = 1, \ldots$ и каждого $n = 1, \ldots$

$$\int_{\Omega_k} f_n d\nu \leqq b.$$

Поэтому без потери общности можно предположить, что для каждого $k = 1, \ldots$ существует $\lim_n \int_{\Omega_k} f_n d\nu$. Для каждого множества Ω_k теорема либо тривиальна, либо доказана выше. Итак, пусть f^k: $\Omega_k \to \mathbf{R}^m$ – такая функция, что почти везде в Ω_k

$$f^k(\omega) \in \operatorname{Ls}(f_n(\omega)),$$

$$\int_{\Omega_k} f^k d\nu \leqq \lim_n \int_{\Omega_k} f_n d\nu.$$

Положим $f = \sum_{k=1}^{\infty} f^k$, причем считаем, что $f^k(\omega) = 0$ для $\omega \notin \Omega_k$. Так как $f(\omega) \in \operatorname{Ls}(f_n(\omega))$ почти везде в Ω, из теоремы о монотонной сходимости (см. D.I, (18)) следует, что

$$\int_\Omega f dv = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega f^k dv$$

и, значит,

$$\int_\Omega f dv \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \lim_n \int_{\Omega_k} f_n dv.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{q} \lim_n \int_{\Omega_k} f_n dv = \lim_n \sum_{k=1}^{q} \int_{\Omega_k} f_n dv \leqq \lim_n \int_\Omega f_n dv,$$

то

$$\int f dv \leqq \lim_n \int_\Omega f_n dv.$$

Наконец, при дополнительном предположении, сделанном во второй части леммы 3, в неравенстве (2) настоящего доказательства имеет место равенство

$$\int g = \lim_n \int f_n,$$

а в неравенстве (4) – равенство

$$g(\omega) = \sum_{\substack{i=0 \\ \delta^i > 0}}^{m} \delta^i \lim_n y_n^i.$$

Из этого следует, что существует такой селектор f соответствия $\mathrm{Ls}(f_n)$, что $\int f = \lim_n \int f_n$.

Для доказательства последнего утверждения леммы 3 покажем, что замыкание множества $\{f_1 \cdot \nu,\ f_2 \cdot \nu, \ldots\}$*) в топологии $(ba^m, \sigma^m(ba, L_\infty))$ состоит из счетно-аддитивных мер. Пусть μ – предельная точка множества $\{f_1 \cdot \nu,\ f_2 \cdot \nu, \ldots\}$ и пусть g, f' и f имеют тот же смысл, что и выше. Тогда, согласно (1),

$$0 \leqq \mu_p(\Omega) = \mu(\Omega) - \mu_c(\Omega) = \lim_n \int f_n - \int g.$$

Таким образом, из дополнительного предположения следует, что

$$\lim_n \int f_n = \int f = \int f' \leqq \int g,$$

и поэтому $\mu_p = 0$.

Это доказывает, что последовательность (f_n) условно компактна в топологии $\sigma^m(L_1, L_\infty)$ и, следовательно, равномерно интегрируема.

Утверждение 7. *Если соответствие φ пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в $\mathbf{R}^m$ замкнутозначно и интегрально ограничено, то интеграл $\int \varphi$ компактен.*

Доказательство. Пусть $\varphi_n = \varphi$, где $n = 1, \ldots$; так как $\varphi(\omega)$ замкнуто, $\mathrm{Ls}(\varphi_n(\omega)) = \varphi(\omega)$. Таким образом, по теореме 6 каждая предельная точка $\int \varphi$ принадлежит $\int \varphi$.

---

*) $f_k \nu$ означает меру μ_k, определенную равенством $\mu_k(E) = \int_E f_k dv$. (*Примеч. пер.*)

Утверждение 8. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ *– пространство с мерой, а* M *– метрическое пространство. Пусть* φ *– соответствие* $\Omega \times M$ *в* $\mathbf{R}^m$, *обладающее следующими свойствами*:

(α) *существует такая интегрируемая функция* $h\colon \Omega \to \mathbf{R}$, *что для каждого* $z \in M$ $|\varphi(\omega, z)| \leqq h(\omega)$;

(β) *почти везде в* Ω *соответствие* $\varphi(\omega, \cdot)$ *замкнуто в точке* z.

Тогда отношение $z \mapsto \int \varphi(\cdot, z)$ *замкнуто в точке* z.

Доказательство. Нужно показать, что для любой сходящейся к z последовательности (z_n) имеет место включение

$$\mathrm{Ls}\left(\int \varphi(\cdot, z_n)\right) \subset \int \varphi(\cdot, z).$$

Соответствие $\varphi(\omega, \cdot)$ замкнуто в точке z, т.е.

$$\mathrm{Ls}\,(\varphi(\omega, z_n) \subset \varphi(\omega, z).$$

Отсюда по теореме 6 следует

$$\mathrm{Ls}\left(\int \varphi(\cdot, z_n)\right) \subset \int \mathrm{Ls}(\varphi(\cdot, z_n)) \subset \int \varphi(\cdot, z),$$

что и требовалось.

Теорема 7. *Пусть* φ_i *– соответствие неатомического и полного пространства с мерой* $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \nu_i)$ *в* $\mathbf{R}^m$ $(i = 1, 2)$, *обладающее следующими свойствами*:

φ_i *замкнутозначно, интегрально ограничено, имеет измеримый график, и эти два соответствия одинаково распределены, т.е. для каждого* $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$

$$\nu_1 \varphi_1^{-1}(B) = \nu_2 \varphi_2^{-1}(B).$$

Тогда:

(a) *Множества* $\mathcal{D}\,\mathcal{L}\varphi_1$ *и* $\mathcal{D}\,\mathcal{L}\varphi_2$ *распределений всех интегрируемых селекторов соответственно* φ_1 *и* φ_2 *имеют одно и то же замыкание относительно слабой сходимости*; *в частности*,

$$\int \varphi_1 d\nu_1 = \int \varphi_2 d\nu_2.$$

(b) *Множества*

$$\mathcal{D}\{f \in \mathcal{L}_{\varphi_1} \mid \int f d\nu_1 = z\},$$

$$\mathcal{D}\{g \in \mathcal{L}_{\varphi_2} \mid \int g d\nu_2 = z\}$$

распределений всех интегрируемых селекторов соответственно φ_1 *и* φ_2, *интегралы от которых равны* z, *имеют одно и то же замыкание относительно слабой сходимости для каждого* $z \in \mathbf{R}^m$.

При доказательстве теоремы 7 воспользуемся следующей леммой.

Лемма 4. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ *– неатомическое пространство с мерой. Пусть* $\{A_i\}_{i=0}^q$ *– семейство множеств из* $\mathcal{A}$ *и* $\{\alpha_i\}_{i=0}^q$ $(\alpha_i \geqq 0)$ *– семейство неотрицательных чисел, обладающее свойствами*:

(I) $\nu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \geqq \sum_{i \in I} \alpha_i$ *для каждого* $I \subset \{0, 1, \ldots, q\}$;

(II) $\nu\left(\bigcap_{i=0}^{q} A_i\right) = \sum_{i=0}^{q} \alpha_i$.

Тогда существует такое подмножество $T_i \subset A_i$, *что* $T_i \cap T_j = \phi$ *для* $i \neq j$ *и* $\nu(T_i) = \alpha_i$ $(i = 0, \ldots, q)$.

Доказательство. Докажем лемму индукцией по q. Для $q=0$ лемма тривиальна. Пусть $q>0$. Будем различать два случая.

Первый случай. Предположим, что для некоторого собственного подмножества I множества $\{0, 1, \ldots, q\}$ в (I) имеет место равенство. Тогда легко проверить, что оба семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ и $\{A_i\}_{i\in \bar{I}}$ удовлетворяют условиям (I) и (II). Поэтому можно применять индуктивное предположение к каждому из этих семейств отдельно.

Второй случай. Предположим, что для каждого собственного подмножества I множества $\{0, 1, \ldots, q\}$ в (I) имеет место неравенство. В частности, $\nu(A_0)>\alpha_0$ и $\nu(A_0\setminus \bigcup_{i\neq 0} A_i)<\alpha_0$. Так как рассматриваемое пространство с мерой неатомическое, существует такое множество B_0, что

$$A_0\setminus \bigcup_{i\neq 0} A_i\subset B_0\subset A_0;$$

и если теперь мы заменим A_0 на B_0, то сохраним в (I) все нестрогие неравенства и при этом хотя бы одно из них превратится в равенство. Ясно, что (II) по-прежнему выполнено, и мы переходим к первому случаю. Это и завершает доказательство.

Доказательство теоремы 7. (a) Пусть $f\in \mathcal{L}_{\varphi_1}$. Построим последовательность (g_n), $g_n\in \mathcal{L}_{\varphi_2}$, сходящуюся по распределению к f.

Так как функция f интегрируема, существует такое компактное множество K в $\mathbf{R}^m$, что

$$\nu_1(f^{-1}(\mathbf{R}^m\setminus K))\leqq 1/n.$$

Пусть $K_0=\mathbf{R}^m\setminus K$ и $K_1, K_2, \ldots, K_q$ образуют разбиение компактного множества K на непересекающиеся борелевские подмножества, диаметр которых меньше $1/n$.

Положим $\alpha_i=\nu_1(f^{-1}(K_i))$ и $A_i=\varphi_2^{-1}(K_i)$ для $i=0, 1, \ldots, q$. Поскольку соответствия φ_1 и φ_2 одинаково распределены, для каждого подмножества $I\subset\{0, 1, \ldots, q\}$ имеем

$$\nu_1\{\varphi_1^{-1}(\bigcup_{i\in I} K_i)\}=\nu_2\{\varphi_2^{-1}(\bigcup_{i\in I} K_i)\}=\nu_2(\bigcup_{i\in I} A_i).$$

Так как множества K_i не пересекаются,

$$\nu_1\{\varphi_1^{-1}(\bigcup_{i\in I} K_i)\}\geqq\nu_1\{f^{-1}(\bigcup_{i\in I} K_i)\}=$$

$$=\sum_{i\in I}\nu_i\{f^{-1}(K_i)\}=\sum_{i\in I}\alpha_i.$$

Следовательно,

(I) $\nu_2(\bigcup_{i\in I} A_i)\geqq\sum_{i\in I}\alpha_i$ для каждого подмножества $I\subset\{0, 1, \ldots, q\}$;

(II) $\nu_2(\bigcup_{i=0}^{q} A_i)=\sum_{i=0}^{q}\alpha_i=1.$

Поэтому мы можем применить лемму 4 и получить разбиение $\{T_0, T_1, \ldots, T_q\}$ множества Ω_2, где $T_i\subset A_i$ и $\nu_2(T_i)=\alpha_i$.

Теперь, выбирая в каждом множестве T_i измеримый селектор соответствия $\omega\mapsto\varphi_2(\omega)\cap K_i$, мы получаем функцию g_n. Легко проверить, что полученная таким образом последовательность (g_n) сходится к f по распределению.

Теперь легко получить равенство $\int \varphi_1 = \int \varphi_2$. Действительно, если $x = \int f \in \int \varphi$, то существует последовательность (g_n), сходящаяся по распределению к f, причем $\int g_n \in \int \varphi_2$. Так как соответствие φ_2 интегрально ограничено, согласно D.I. (42), отсюда следует, что $\lim \int g_n = x$. Согласно утверждению 6 множество $\int \varphi_2$ компактно. Следовательно, $x \in \int \varphi_2$

(b) Пусть $C = \int \varphi_1 = \int \varphi_2$. По теореме 3 и утверждению 6 интеграл C выпуклый компактный. Доказательство проводится индукцией по размерности C.

Если размерность C равна нулю, то применимо утверждение (a) доказываемой теоремы. Предположим, что $\dim(C) = n$.

Пусть $f \in \mathcal{L}_{\varphi_1}$ и $x = \int f d\nu_1$. Построим последовательность (g_n), сходящуюся к f по распределению, где $g_n \in \mathcal{L}_{\varphi_2}$ и $\int g_n d\nu_2 = x$.

Согласно утверждению (a), существует последовательность (g'_n), $g'_n \in \mathcal{L}_{\varphi_2}$, сходящаяся к f по распределению.

Предположим сначала, что x принадлежит относительной внутренности C. Пусть y_n – такая точка границы C, что x принадлежит сегменту $[\int g'_n, y_n]$. Следовательно, $x = \alpha_n y_n + (1 - \alpha_n) \int g'_n$, где $y_n = \int h_n$, причем $h_n \in \mathcal{L}_{\varphi_2}$. Так как (g'_n) сходится к f по распределению, из D.I, (42) вытекает, что $\int g'_n \to x$, и, следовательно, $\alpha_n \to 0$. Применяя теорему Ляпунова (см. D.I, (15)), находим множество $S \subset \Omega_2$, удовлетворяющее условиям

$$\nu_2(S_n) = \alpha_n, \quad \int_{S_n} g'_n = \alpha_n \int g'_n, \quad \int_{S_n} h_n = \alpha_n \int h_n.$$

Положим теперь

$$g_n(\omega) := \begin{cases} g'_n(\omega) & \text{для} \quad \omega \notin S_n, \\ h_n(\omega) & \text{для} \quad \omega \in S_n, \end{cases}$$

Легко проверить, что $\int g_n = x$ и что последовательность (g_n) сходится к f по распределению.

Предположим теперь, что x принадлежит относительной границе выпуклого компакта C. Пусть $p \in \mathbf{R}^m$ определяет такую опорную гиперплоскость, что

$$px = \max_{z \in C} p \cdot z.$$

Положим

$$\varphi_i^p(\omega) := \{ y \in \varphi_i(\omega) \mid p \cdot y = \max p \cdot \varphi_i(\omega) \}, \quad \omega \in \Omega_i, \quad i = 1, 2.$$

Из утверждения 3 следует, что соответствие φ_i^p имеет измеримый график. Ясно, что φ_i^p интегрально ограничено и замкнутозначно. Из утверждения 6 следует, что $f \in \mathcal{L}_{\varphi_1^p}$. Если мы сможем показать, что соответствия φ_1^p и φ_2^p одинаково распределены, то доказательство будет завершено, так как размерность $\int \varphi_i^p$ равна $n - 1$ и, следовательно, применимо индуктивное предположение.

Можно показать, что два замкнутозначных соответствия φ_1^p и φ_2^p одинаково распределены тогда и только тогда, когда существуют две такие одинаково распределенные измеримые функции h_i из $(\Omega_i, \mathcal{A}, \nu_i)$ в метрическое пространство с мерой $(T, \mathcal{B}(T), \lambda)$ и соответствие $\varphi: T \to \mathbf{R}^m$, что $\varphi_i = \varphi \circ h_i$ $(i = 1, 2)$. Мы не будем доказывать этот результат, поскольку в рассматриваемых в этой книге приложениях соответствия φ_1 и φ_2 всегда задаются в форме такой декомпозиции*).

Теперь легко завершить доказательство. Пусть

$$\varphi^p(t) = \{x \in \varphi(t) \mid p \quad x = \max p \cdot \varphi(t)\}, \qquad t \in T.$$

Так как мы предполагаем, что $\varphi_i = \varphi \circ h_i$, то $\varphi_i^p = \varphi^p \circ h_i$ Поскольку отображения h_1 и h_2 одинаково распределены, соответствия φ_1^p и φ_2^p также распределены одинаково. Этим теорема доказана..

Следующий результат мы приведем без доказательства. Он потребуется в гл. 4.

Теорема 8**). *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ *– пространство с мерой, а* Φ *– соответствие из* $\mathcal{A}$ *в* $\mathbf{R}^m$*, обладающее следующими свойствами*:

(α) Φ *счетно аддитивно (т.е. для каждой последовательности* (A_n) *попарно непересекающихся элементов из* $\mathcal{A}$ *справедливо равенство*

$$\Phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n));$$

(β) $\Phi(A)$ *выпукло для каждого* $A \in \mathcal{A}$;

(γ) $\Phi(A) = \{0\}$, *если* $\nu(A) = 0$.

Тогда существует такое выпуклозначное соответствие φ *из* Ω *в* $\mathbf{R}^m$*, что*:

(a) $\int_A \varphi d\nu \subset \Phi(A)$, $\quad \mathrm{cl}\,\Phi(A) = \mathrm{cl} \int_A \varphi d\nu$ *для каждого* $A \in \mathcal{A}$;

(b) *соответствие* φ *измеримо в том смысле, что множество*

$$\{\omega \in \Omega \mid \varphi(\omega) \cap F \neq \phi\}$$

принадлежит $\mathcal{A}$ *для каждого замкнутого подмножества* F *пространства* $\mathbf{R}^m$.

Легко проверить (используя утверждение 4 и задачу 4), что если задано соответствие Φ, обладающее свойствами, перечисленными в теореме 8, то существует такое замкнутозначное и выпуклозначное соответствие φ с измеримым графиком, что для каждого $A \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{cl}\,\Phi(A) = \mathrm{cl} \int_A \varphi d\nu.$$

Задачи

Задача 1. Используя утверждение 3, дать простое доказательство следующего результата.

Пусть φ – компактнозначное соответствие пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в полное сепарабельное метрическое пространство S. Если φ имеет измеримый график, то существует такая измеримая функция f, что $f(\omega) \in \varphi(\omega)$ почти везде на Ω.

Задача 2. Пусть φ_1 и φ_2 – соответствия из $(\Omega, \mathcal{A})$ в $\mathbf{R}^m$. Рассмотрим произведение $\varphi_1 \times \varphi_2$: $\omega \mapsto \varphi_1(\omega) \times \varphi_2(\omega)$. Показать, что если

---

*) Доказательство см. Харт и Кольберг (1974).

**) Доказательство см. Арстейн (1972).

$\varphi_i^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ для каждого замкнутого множества F в $\mathbf{R}^m$ $(i = 1, 2)$, то произведение $\varphi_1 \times \varphi_2$ может не обладать этим свойством.

З а д а ч а 3. Пусть S – полное сепарабельное метрическое пространство. Показать, что график замкнутозначного соответствия φ пространства из S в $\mathbf{R}^m$ принадлежит $\mathscr{B}(S \times \mathbf{R}^m)$ тогда и только тогда, когда $\{x \in S \mid \varphi(x) \cap S \neq \phi\} \in \mathscr{B}(S)$ для каждого замкнутого подмножества F из $\mathbf{R}^m$.

У к а з а н и е. Показать, что график G_φ так же, как и его дополнение, является аналитическим множеством (см. Новиков, 1939) *).

З а д а ч а 4. Пусть φ – соответствие из $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в $\mathbf{R}^m$ с измеримым графиком. Показать, что $\int \overline{\varphi} \subset \overline{\int \varphi}$.

З а д а ч а 5. Пусть φ_1 и φ_2 – два таких соответствия из $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в $\mathbf{R}^m$ с измеримыми графиками, что $\int \varphi_1 \neq \phi$ и $\int \varphi_2 \neq \phi$. Показать, что

$$\overline{\operatorname{conv}} \int (\varphi_1 + \varphi_2) = \overline{\operatorname{conv}} \left(\int \varphi_1 + \int \varphi_2 \right),$$

где $\overline{\operatorname{conv}}$ обозначает выпуклую замкнутую оболочку.

З а д а ч а 6. Установить следующий результат. Пусть (φ_n) – такая последовательность соответствий из $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ в $\mathbf{R}_+^m$, что существует равномерно интегрируемая последовательность (g_n) соответствий из Ω в $\mathbf{R}^m$, удовлетворяющая почти везде в Ω условию

$$\varphi_n(\omega) \leqq g_n(\omega).$$

Тогда $\int \mathrm{Li}(\varphi_n) \subset \mathrm{Li}(\int \varphi_n)$ (см. Ауман, 1965).

Литературные ссылки

Теорема 1 принадлежит Ауману (1969, теорема 2); его доказательство отличается от приводимого здесь. Ауман использует лемму Дж. фон Неймана (1949), которая утверждает, что отображение полного сепарабельного метрического пространства в полное сепарабельное метрическое пространство, имеющее аналитический график, обладает селектором. Лемма 1 принадлежит Куратовскому и Рылль-Нарджевскому (1965). Доказательство, приведенное здесь, взято у Ландерса (1968). Весьма общие теоремы о селекторе доказаны Сайоном (1960). Утверждения 3 и 4 приведены Дебре (1967а). Существует обширная литература об измеримых и интегрируемых соответствиях; укажем небольшую часть из нее: Кудо (1954), Ауман (1965), Дебре (1967а), Рокафеллар (1969) и Артстейн (1972). Теорема 3 принадлежит Рихтеру (1963); ее следствие впервые установлено Шмайдлером (1970). Утверждение 5 принадлежит Винду (1965, лемма А). Утверждение 6 взято у Гильденбранда (1969). Вторая часть теоремы 4 основана на идеях Дебре и Шмайдлера (1972, лемма 4). Теорема 6 обобщает результат Аумана (1965, утверждение 4.1). Лемма 3 впервые была доказана Шмайдлером (1970). Приведенное здесь доказательство взято у Гильденбранда и Мертенса (1971). Теорема 7 принадлежит Харту и Кольбергу (1974). Теорема 8 принадлежит Артстейну (1972).

---

*) Я благодарен Артстейну за указание на эту ссылку.

ЧАСТЬ II

ЭКОНОМИКА

ГЛАВА 1

СПРОС

§ 1.1. Введение

Здесь вводятся следующие стандартные, относящиеся к экономике понятия *) : товар, пространство товаров, план потребления, множество потребления, отношение предпочтений, благосостояние, бюджетное множество, множество спроса.

Пространство товаров $\mathbf{R}^l$. *Товар* представляет собой вещь или услугу. Он характеризуется своими физическими свойствами, а также временем и местом, где он доступен. Таким образом, одинаково характеризуемые физические вещи (например, пшеница определенного сорта), фиксируемые в различные моменты времени и (или) в различных точках пространства, будут рассматриваться как различные товары. Типичными примерами товаров являются предметы потребления, относящиеся к питанию, домашнему обиходу, одежде. Типичным примером услуги является труд. Физической характеристикой труда является производимая работа.

Количество товара может быть выражено числом. Предполагается, что физические характеристики, определяющие товар, однородны (т.е. равные количества одного и того же товара взаимозаменяемы в любом их применении). Товары считаются неограниченно делимыми (т.е. количество товара может быть выражено любым неотрицательным вещественным числом).

Предполагается, что имеется конечное число различных товаров, которые отмечаются индексом h, принимающим значения от 1 до l. Если каждый орт $1_h = (0, ..., 1, ..., 0)$ линейного пространства $\mathbf{R}^l$ отождествляется с единицей товара h $(h = 1, ..., l)$, то линейное пространство $\mathbf{R}^l$ называется *пространством товаров.* Любой набор товаров может быть представлен некоторым вектором в пространстве товаров $\mathbf{R}^l$.

Подчеркнем, что включение в определение товара характеристик времени и места имеет свои недостатки: осмысленность и приемлемость некоторых вводимых в дальнейшем предположений (в частности, о системе предпочтений) следует всегда рассматривать с точки зрения времени и места.

План потребления $x \in \mathbf{R}^l$. Множество потребления $X \subset \mathbf{R}^l$. *План потребления* некоторого участника экономики указывает количество каждого из потребляемых им (т.е. имеющихся в его распоряжении) товаров и количество труда (возможно, несколько видов), которое он предлагает. Условимся выражать количество предлагаемого участником товара отрицательным числом, а количество товара, которое должно быть

*) Стандартной ссылкой на этот счет служит "Теория ценностей" (Дебре, 1959).

предоставлено ему, положительным. Тогда любой план потребления можно представить некоторым вектором x в пространстве товаров $\mathbf{R}^l$.

По вполне понятным физическим, психологическим и институциональным причинам не каждый вектор из $\mathbf{R}^l$ может быть осмысленно интерпретирован как план потребления. Например, невозможны комбинации товаров, которым соответствует предложение некоторых видов труда в количестве, поддержания жизни. Предполагается, что для каждого потребителя a имеется

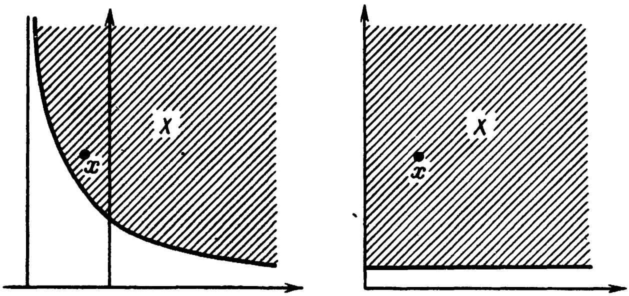

Рис. 1.1

некоторое непустое замкнутое подмножество X_a из $\mathbf{R}^l$, называемое *множеством потребления* участника экономики a, которое описывает множество априори возможных планов потребления. Здесь априорность возможности означает, что, не учитывая бюджетных ограничений, участник экономики может реализовать данный план потребления, т.е. он физически способен предоставить труд и потребить предметы потребления в соответствии с $x \in X_a$.

Хотя множество потребления X обычно принадлежит некоторому подпространству пространства $\mathbf{R}^l$, размерность которого существенно меньше l, все же в общем случае его размерность оказывается довольно большой. Пересечение типичного множества потребления X с плоскостью, параллельной координатным осям труда и предметов питания и координатным осям двух потребительских товаров, показано на рис. 1.1. Как уже объяснялось, отрицательными могут быть только те координаты плана потребления, которые относятся к различным видам труда. Так как в сутках всего 24 ч, независимо от длины периодов времени, используемых при определении пространства товаров, существует универсальная нижняя граница b для всех возможных планов потребления каждого участника экономики. Аналогично из интерпретации множества потребления следует существование такого (возможно, большого) числа k, что любой участник экономики сумеет поддержать свое существование, даже если план его потребления по каждому товару окажется меньшим, чем k. Иными словами, мы предполагаем существование такой *универсальной постоянной* k, что для любого множества потребления X множество $\{x \in X \mid x \leqq (k)\}$ непусто.

Наконец, по техническим соображениям, которые станут понятными в дальнейшем, мы будем предполагать, что множества потребления X являются выпуклыми (типичным примером рассуждений, в которых используется это условие, может служить доказательство предложения 1).

Резюмируем сделанные предположения.

Определение 1. *Множество потребления* X есть непустое подмножество пространства товаров, замкнутое, выпуклое и ограниченное снизу. Для данного вектора $b \in \mathbf{R}^l$ и компактного подмножества $K \subset \mathbf{R}^l$ обозначим через $\mathscr{X}$ семейство всех множеств потребления X, обладающих свойствами $b \leqq X$ и $X \cap K \neq \phi$.

Зафиксируем раз и навсегда вектор b и компактное множество K, причем их конкретные численные параметры не представляются существенными. Такое ограничение "универсума" множеств потребления не является ограничением для экономического анализа, однако оно упрощает математическое изложение (множество $\mathscr{X}$ в действительности оказывается компактным (см. § 1.2, теорема 1).

Предпочтения $\succ$. Будем говорить, что некоторый участник экономики *предпочитает* план потребления x плану потребления x', если во всех случаях, когда ему предоставляется выбор из альтернатив x и x', он выбирает x. Бинарное отношение "предпочитается" становится мощным инструментом экономического анализа в тех случаях, когда в поведении участников экономики соблюдается известная "согласованность" выборов. Абсолютная согласованность выборов (если говорить об идеальном случае) описывается *транзитивным* отношением предпочтения. Мы не имеем в виду обсуждать здесь эмпирическое содержание этой гипотезы *).

Давая определение понятию "пространство товаров", мы предположили, что все товары являются неограниченно делимыми. Следовательно, для придания понятию "отношение предпочтения" большей аналитической силы, мы примем, что это отношение является *непрерывным*, т.е. что если x предпочтительней, чем y, и что если в результате достаточно малого изменения x перейдет в x', а y – в y', то x' останется предпочтительней, чем y'. Это предположение является техническим; оно не может быть опровергнуто экспериментально.

Предшествующие рассуждения обосновывают следующее определение.

Определение 2. *Отношение предпочтения* задается парой $(X, \succ)$, где X – множество потребления, а $\succ \subset X \times X$ – транзитивное и иррефлексивное бинарное отношение на X, причем множество $\succ$ является в $X \times X$ открытым. Множество всех отношений предпочтения, для которых $X \in \mathscr{X}$, обозначается через $\mathscr{P}$.

Вместо $(x, y) \in \succ$ будем использовать более наглядную запись $x \succ y$. Поэтому $x \not\succ y$ будет означать $(x, y) \notin \succ$. Поставим в соответствие каждому отношению предпочтения $(X, \succ)$ в $\mathscr{P}$ множество

$$F := \{(x,y) \in \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l \mid x, y \in X \quad \text{и} \quad x \not\succ y\}.$$

*) Известно, что люди делают более или менее часто ошибки в арифметических вычислениях. Это, очевидно, не означает, что они не признают законов арифметики. Обнаружив ошибку, они стремятся ее исправить. То же самое верно и в отношении принятия решений. Наблюдается, что индивидуумы принимают нетранзитивные решения. Однако, как показывают эксперименты, индивидуумы склонны изменять свои решения, как только начинают отдавать себе отчет в их нетранзитивности. На это обстоятельство обратил внимание Маршак (1950).

Это множество F характеризуется следующими свойствами:

(I) F является замкнутым подмножеством $\mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l$.

(II) Множество $\{x \in \mathbf{R}^l \mid$ существует y, для которого $(x, y) \in F\}$ принадлежит $\mathscr{X}$.

(III) (Рефлексивность.) Из $(x, y) \in F$ следует $(x, x) \in F$ и $(y, y) \in F$.

(IV) (Отрицательная транзитивность.) Из $(x, y) \notin F$ и $(y, z) \notin F$ следует $(x, z) \notin F$.

По данному множеству F можно получить соответствующее отношение предпочтений, полагая $X := \{x \in \mathbf{R}^l \mid (x, x) \in F\}$ и $\succ := (X \times X) \setminus F$.

Для доказательства утверждений из следующих глав часто будут нужны дополнительные свойства отношений предпочтений. Выделим поэтому некоторые подмножества множества $\mathscr{P}$ отношений предпочтения указанием одного или нескольких из следующих свойств отношений.

Локальная ненасыщаемость. Отношение предпочтения $(X, \succ)$ называется *локально ненасыщаемым*, если для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U существует точка $x' \in X \cap U$, для которой $x' \succ x$.

Множество всех локально ненасыщаемых отношений предпочтения из $\mathscr{P}$ обозначим через $\mathscr{P}_{\mathrm{lns}}$.

Монотонность. Отношение предпочтения $(X, \succ)$ называется *монотонным*, если множество потребления X является положительным ортантом $\mathbf{R}^l_+$ и из $0 \leqq x \leqq y$, $x \neq y$ следует $y \succ x$. Множество всех монотонных отношений предпочтения из $\mathscr{P}$ обозначим через $\mathscr{P}_{\mathrm{mo}}$.

Очевидно, можно было бы определить понятие "монотонность" и когда множество X не является положительным ортантом. Тем не менее в моделях, в которых необходимо рассматривать множества потребления общего вида, например в моделях экономики с производством (Гл. 4), предположение о монотонности предпочтений оказывается, во всяком случае, слишком сильным. Для монотонных предпочтений из $\mathscr{P}_{\mathrm{mo}}$ вместо $(\mathbf{R}^l_+, \succ) \in \mathscr{P}_{\mathrm{mo}}$ будем писать $\succ \in \mathscr{P}_{\mathrm{mo}}$.

Транзитивное безразличие. Отношение предпочтения $(X, \succ)$ называется *отрицательно транзитивным*, если для любых $x, y, z \in X$ из $x \nsucc y$ и $y \nsucc z$ следует $x \nsucc z$.

Множество всех отрицательно транзитивных отношений предпочтения из $\mathscr{P}$ обозначим $\mathscr{P}^*$.

Для произвольного отношения предпочтения $\succ$ из $\mathscr{P}^*$ определяется *отношение безразличия* $\sim$, где $x \sim y$ в том и только том случае, когда $x \nsucc y$ и $y \nsucc x$. Отношение безразличия $\sim$ на множестве X рефлексивно, транзитивно и симметрично. Отношение $\nsucc$ можно теперь записывать как $\precsim$ *). Отношение *нестрогого предпочтения* $\precsim$ является рефлексивным, транзитивным и полным.

Отношения предпочтения из $\mathscr{P}^*$ можно наглядно представить, изобразив их поверхности безразличия, как это сделано на рис. 1.2.

---

*) В оригинале *preference-indifference relation*, т.е. отношение предпочтения–безразличия. В связи с этим заметим, что отношение предпочтения $\succ$ в отечественной литературе иногда называется отношением *строгого предпочтения*. (*Примеч. пер.*)

Ясно что отношение $\sim$ можно определить и для отношений предпочтения из $\mathcal{P}$. Однако от такого отношения будет мало пользы ввиду его нетранзитивности.

Выпуклость. Отношение предпочтения $(X, \precsim)$ из $\mathcal{P}^*$ называется:

(a) *выпуклым*, если для любого $z \in X$ множество $\{x \in X \mid z \precsim x\}$ выпукло;

(b) *строго выпуклым*, если для любых $x \sim x'$, $x \neq x'$, и $\lambda \in (0, 1)$ выполняется $\lambda x + (1 - \lambda) x' \succ x$.

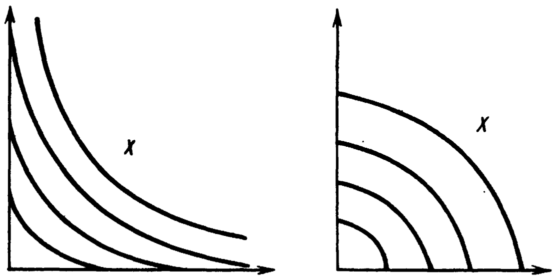

Рис. 1.2

Множество всех выпуклых (строго выпуклых) отношений предпочтения из $\mathcal{P}^*$ обозначается $\mathcal{P}^*_{\text{conv}}$ (соответственно $\mathcal{P}^*_{\text{sconv}}$).

Мы определили выпуклость предпочтений только для отношений из $\mathcal{P}^*$, так как для отношений из $\mathcal{P}$, не принадлежащих $\mathcal{P}^*$, использовать свойство выпуклости не удается.

Наконец, будем пользоваться естественными обозначениями $\mathcal{P}^*_{\text{mo}} := \mathcal{P}^* \cap \mathcal{P}_{\text{mo}}$, $\mathcal{P}^*_{\substack{\text{mo}\\ \text{co}}} := \mathcal{P}^*_{\text{co}} \cap \mathcal{P}_{\text{mo}}$ и т.д.

Полезность по Парето. Иногда оказывается удобным представлять отношение предпочтения вещественной функцией. Пусть $(X, \succ)$ – отношение предпочтения. *Полезностью по Парето* для отношения $(X, \succ)$ называется такая вещественная функция $w \colon X \to \mathbf{R}$, что $x \succ y$ имеет место тогда и только тогда, когда $u(x) \succ u(y)$. Очевидно, если отношение предпочтения $(X, \succ)$ допускает представление посредством непрерывной функции полезности, то отношение $\succ$ является отрицательно транзитивным, а соответствующее отношение нестрогого предпочтения $\precsim$ является непрерывным полным предпорядком. Обратно, было показано (по поводу ссылок см. замечание 1.1 в конце главы), что для любого непрерывного полного предпорядка на связном сепарабельном топологическом пространстве X (или на топологическом пространстве со счетной базой) существует полезность по Парето. Так как в этой книге непрерывное представление отношения предпочтения используется лишь один раз (именно в ходе доказательства теоремы 3 из § 4.3), мы не описываем детали построения полезности по Парето*).

Цены $p \in \mathbf{R}^l$. Система цен p ставит в соответствие каждому товару h вещественное число p_h – его цену. Таким образом, p можно рассматривать

*) Эти детали можно найти, например, в гл. III книги: Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1978. (*Примеч. ред.*)

как элемент из $\mathbf{R}^l$. Выражение "в экономике действует система цен p" будет далее означать, что любой участник экономики может предложить (в конкретных условиях времени и места, в которых определен товар h) количество $p_{h'}/p_h$ товара h в обмен на единицу товара h' (в тех условиях времени и места, в которых определен товар h'). Ясно, что в такой интерпретации системы цен сконструированная экономика обходится без того товара, который служит средством обмена (т.е. без денег). Если действует система цен p, то набор товаров $x \in \mathbf{R}^l$ можно обменять на набор товаров $x' \in \mathbf{R}^l$, если их меновые стоимости совпадают. Подчеркнем, что нормы процента и дисконта можно получить в результате сравнения цен в одном и том же месте, но в различные моменты времени, а обменные курсы – путем сравнения цен в одни и те же моменты времени в различных точках пространства.

Цена отдельного товара может быть положительной (дефицитный товар), нулевой (свободный товар) или отрицательной (вредный товар).

Бюджетное множество $\beta(X, w, p) \subset \mathbf{R}^l$. Если действует система цен p, то на выбор плана потребления из множества потребления X_a участника a накладывается дополнительное ограничение: меновая стоимость $p \cdot x$ плана потребления x не может превосходить некоторой величины w_a – *богатства* участника экономики a. Вещественное число w_a представляет собой меновую стоимость всей его собственности (недвижимое имущество, автомобили, мебель, акции, облигации и т.п.). Таким образом, богатство w является, как правило, функцией от действующей системы цен. В теории спроса богатство будет удобно рассматривать как независимую переменную.

Подчеркнем, что стоимость труда, который может предоставить участник a, т.е. его трудовой доход, не включается в w_a. Количество труда, предлагаемое участником a, является частью его плана потребления. Следовательно, при данной системе цен трудовой доход участника экономики определяется тем планом потребления, который он выбирает.

Определение 3. Пусть a – участник экономики с множеством потребления X и богатством w. Определим в условиях системы цен p *бюджетное множество* $\beta(X, w, p)$ участника экономики a:

$$\beta(X, w, p) := \{ x \in X, p \cdot x \leqslant w \}.$$

На рис. 1.3 изображены бюджетные множества для двух товаров.

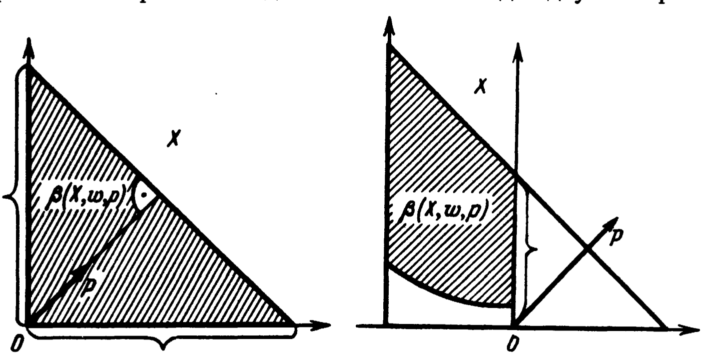

Рис. 1.3

Множество спроса $\varphi(X, \succ, w, p) \subset \mathbf{R}^l$. План потребления, который в действительности будет выбран из бюджетного множества $\beta(X, w, p)$, зависит от конкретной системы предпочтений.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть a – участник экономики с отношением предпочтения $(X, \succ)$ и богатством w. В условиях системы цен p определим *множество спроса* $\varphi(X, \succ, w, p)$ как множество максимальных элементов бюджетного множества, т.е.

$$\varphi(X, \succ, w, p) := \{ z \in \beta(X, w, p) \mid \text{не существует } x \in \beta(X, w, p), x \succ z \}.$$

Следовательно, $z \in \varphi(X, \succ, w, p)$ имеет место в том и только том случае, когда из $x \succ z$ следует $px > w$. На рис. 1.4 изображены множества

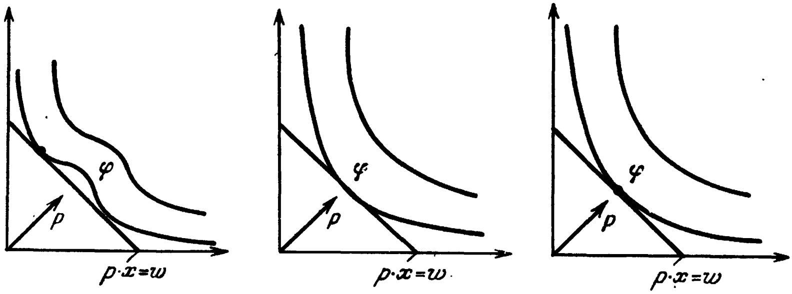

Рис. 1.4

спроса для отношений предпочтения из $\mathcal{P}^*$, заданных кривыми безразличия.

Основная задача этой главы состоит в исследовании зависимости множества спроса от определяющих его аргументов: отношения предпочтения $(X, \succ)$, богатства w и системы цен p. Это исследование несколько осложняется тем неприятным обстоятельством, что лишь достаточно сильные предположения относительно предпочтений (строгая выпуклость) обеспечивают в общем случае однозначную определенность спроса (т.е. множество $\varphi(X, \succ, w, p)$ состоит из единственного вектора). Однако "предпочтение" – тонкое понятие, возможно, даже слишком тонкое, чтобы априори удовлетворять достаточно сильным предположениям. Поэтому мы будем по возможности воздерживаться от этого предположения и иметь дело с множествами спроса.

Резюме. Первичными экономическими понятиями теории спроса, как она здесь представлена, являются:

(1) *пространство товаров* $\mathbf{R}^l$;

(2) *характеристики потребления*:

 (a) *множество потребления* $X \subset \mathbf{R}^l$;

 (b) *предпочтения* $\succ \subset \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l$;

 (c) *богатство* $w \in \mathbf{R}$;

(3) *система цен*: $p \in \mathbf{R}^l$.

В терминах этих первичных понятий мы можем определить:

бюджетное множество: $\beta(X, w, p) := \{x \in X \mid px \leqq w\}$,

множество спроса: $\varphi(X, \succ, w, p) := \{z \in \beta(X, w, p) \mid \text{не существует } x \in \beta(X, w, p), x \succ z\}$.

Задача 1. Пусть L – лексикографическое упорядочение на $\mathbf{R}^2$, т.е. $(\xi, \eta)\, L\, (\xi', \eta')$, если (1) $\xi < \xi'$ или (2) $\xi = \xi'$ и $\eta < \eta'$.

Показать, что не существует функции f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, для которой $(\xi, \eta)\, L\, (\xi', \eta')$ тогда и только тогда, когда $f(\xi, \eta) < f(\xi', \eta')$.

Задача 2. Показать что для рефлексивного, транзитивного и полного бинарного отношения $\precsim$ на топологическом пространстве X следующие свойства эквивалентны.

(I) Множество $\{(x, y) \in X \times X \mid x \precsim y\}$ замкнуто в $X \times X$.

(II) Для любых $x, y \in X$, $x \prec y$, найдутся такие окрестности U_x и U_y соответственно точек x и y, что $x' \prec y'$ для любых $x' \in U_x$ и $y' \in U_y$.

(III) Множество $\{x \in X \mid x \succsim z\}$ замкнуто, а множество $\{x \in X \mid x \succ z\}$ открыто для любого $z \in X$.

Задача 3. Показать, что для любого иррефлексивного, транзитивного и монотонного (но не обязательно полного) отношения $\succ$ на $\mathbf{R}^l_+$ эквивалентны два следующих утверждения.

(I) Множество $\succ$ открыто относительно $\mathbf{R}^{2l}_+$.

(II) Для любого $z \in \mathbf{R}^l_+$ множества $\{x \in \mathbf{R}^l_+ \mid x \succ z\}$ и $\{x \in \mathbf{R}^l_+ \mid z \succ x\}$ открыты относительно $\mathbf{R}^l_+$ (Шмайдлер, 1969).

Задача 4. Доказать следующее утверждение.

Пусть X – связное топологическое пространство, а $\precsim$ – бинарное отношение на нем со следующими свойствами:

(1) Отношение $\precsim$ транзитивно.

(2) Отношение $\precsim$ замкнуто, т.е. для любого $z \in X$ множества $\{x \in X \mid x \precsim z\}$ и $\{x \in X \mid z \precsim x\}$ являются замкнутыми.

(3) Отношение $\prec$ открыто, т.е. для любого $z \in X$ множества $\{x \in X \mid x \prec z\}$ и $\{x \in X \mid z \prec x\}$ открыты ($x \prec z$ означает $x \precsim z$, но не $z \precsim x$).

(4) Существуют x и x', для которых $x \prec x'$.

Тогда отношение $\precsim$ является полным.

Указание. Показать, что если $y \prec z$, то

$$\{x \in X \mid x \succ y\} \cup \{x \in X \mid x \prec y\} = X.$$

Предположить существование несравнимых v и w из X и показать, что это ведет к противоречию (Шмайдлер, 1971).

Задача 5. Пусть $\mathcal{P}^*_{\leqq}$ обозначает множество отношений предпочтения $\precsim$ из $\mathcal{P}^*$, совместимых с векторным упорядочением $\leqq$, т.е. если $x \in X$ и $x \leqq y$, то $x \precsim y$. Пусть $\mathcal{P}^*_{\mathrm{wmo}}$ означает множество слабомонотонных отношений предпочтения из $\mathcal{P}^*$, т.е. из $x \in X$ и $x < y$ следует $x \prec y$. Показать, что

$$\mathcal{P}^*_{\mathrm{lns}} \cap \mathcal{P}^*_{\leqq} = \mathcal{P}^*_{\mathrm{wmo}}.$$

Задача 6 (минимизация затрат). Пусть $(X, \succ)$ – отношение предпочтения из $\mathcal{P}^*$. Для произвольного $z \in X$ и вектора цен p определим множество

$$\sigma(\precsim, z, p) := \{x \in X \mid z \precsim X \text{ и } px = \min_{y \succsim z} py\}.$$

Тогда:

(a) если $\precsim \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{lns}}$, то из $x \in \varphi(\precsim, w, p)$ следует $x \in \sigma(\precsim, x, p)$;

(b) если $pz > \inf p \cdot X$, то из $x \in \sigma(\precsim, z, p)$ следует $x \in \varphi(\precsim, p \cdot z, p)$.

З а д а ч а 7 (выпуклое замыкание предпочтений). Для произвольного $\precsim \in \mathscr{P}^*_{\mathrm{mo}}$ определим отношение $\dot{\precsim}$, положив

$$\dot{\precsim} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^{2l} \mid \text{для любого } z \in \mathbf{R}^l_+ \text{ из } x \in \operatorname{co} \psi(z) \text{ следует } y \in \operatorname{co} \psi(z)\},$$

где $\psi(z) = \{x \in \mathbf{R}^l \mid z \precsim x\}$.

Доказать, что:

(1) $\dot{\precsim} \in \mathscr{P}^*_{\substack{\mathrm{mo}\\ \mathrm{co}}}$ для любого $\precsim \in \mathscr{P}^*_{\mathrm{mo}}$;

(2) $\operatorname{co} \varphi(\precsim, w, p) = \varphi(\dot{\precsim}, w, p)$ для любого $(w, p) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^l$.

У к а з а н и е. Показать, что соответствие $z \to \operatorname{co}\{x \in X \mid x \succsim z\}$ является замкнутым. Из этого вывести непрерывность отношения $\dot{\precsim}$.

Примечания к § 1.1. Все понятия этого параграфа более детально рассматриваются у Дебре (1959) в гл. 2 и 4.

Доказательства существования полезности по Парето давались Эйленбергом (1941), Дебре (1954a, 1959, 1964) и Радером (1963).

По-видимому, наиболее коротким доказательством для общего случая является упрощенный вариант доказательства Дебре (1964), предложенный Боуэном (1968).

Существует альтернативный подход к теории спроса, предложенный Самуэльсоном (1938). Вместо того чтобы выводить спрос при заданных ценах и доходе из отношений предпочтения, понимаемых как первичные понятия, можно в качестве такого первичного сразу же принять понятие функции (соответствия) спроса. Если функция f обнаруживает определенную "согласованность" выбора (т.е. то, что называется *сильной аксиомой выявленного предпочтения*), то можно доказать существование отношения предпочтения (в общем случае не определяемого функцией f однозначно), которое порождает функцию спроса f. Таким образом, логически эти подходы эквивалентны. Представляется, что отношение предпочтения является все же более фундаментальным понятием. В частности, оно применимо к исследованию более общих ситуаций, когда цен нет.

Вклад в развитие теории выявленного предпочтения внесли Самуэльсон (1938), Вилле (1946), Хаутеккер (1950), Удзава (1959), Африат (1967) и Рихтер (1966). См. также работу Чипмена и др. (1971).

§ 1.2. Индивидуальный спрос

Выясняется, при каких условиях зависимость множества спроса $\varphi(X, \succ, w, p)$ от определяющих его параметров (отношения предпочтений $(X, \succ)$, состояния w и цен p) оказывается непрерывной.

Близость предпочтений. Вкусы участников экономики описываются отношениями предпочтений. Интуитивное понятие "сходства" вкусов превращается в математически строгое посредством задания на множестве всех отношений предпочтения $\mathscr{P}$ некоторой топологии. С экономической точки зрения вкусы можно квалифицировать как сходные, если они порождают сходный спрос в сходных в смысле цен и богатства ситуациях. Очевидно, это является одним из необходимых условий для любого экономически осмысленного и операционального понятия сходства вкусов.

Несомненно, на множестве отношений предпочтений $\mathcal{P}$ всегда существует топология (например, дискретная), в которой соответствие спроса обладает свойствами непрерывности. По соображениям, которые станут понятными впоследствии, хотелось бы, однако, иметь метризуемую и сепарабельную или даже компактную топологию. Такая топология существует и легко поддается характеризации: это самая грубая топология на $\mathcal{P}$ из тех, для которых множество

$$\{X, \succ, x, y\} \in \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l \mid x, y \in X \text{ и } x \not\succ y\}$$

является замкнутым.

Как было объяснено в предыдущем параграфе, каждое отношение предпочтения $(X, \succ)$ из $\mathcal{P}$ описывается замкнутым подмножеством

$$F := \{(x, y) \in X \times X \mid x \not\succ y\}$$

множества $\mathbf{R}^{2l}$.

Следовательно, множество отношений предпочтения $\mathcal{P}$ можно рассматривать как подмножество множества $\mathcal{F}(\mathbf{R}^{2l})$ всех замкнутых подмножеств $\mathbf{R}^{2l}$. Отсюда естественной в качестве топологии на $\mathcal{P}$ является топология $\mathcal{J}_c$ замкнутой сходимости на $\mathcal{P}$ (которая определена в B.II).

Т е о р е м а 1. (a) *Множество отношений предпочтения $\mathcal{P}$, наделенное топологией замкнутой сходимости $\mathcal{J}_c$, является компактным и метризуемым.*

(b) *Последовательность $(X_n, \succ_n)$ сходится к $(X, \succ)$ в $(\mathcal{P}, \mathcal{J}_c)$ в том и только том случае, если* $\mathrm{Li}(F_n) = F = \mathrm{Ls}(F_n)$.

(c) *Топология замкнутой сходимости $\mathcal{J}_c$ является самой грубой хаусдорфовой топологией на $\mathcal{P}$, обладающей тем свойством, что множество*

$$\{(X, \succ, x, y) \in \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l \mid x, y \in X \text{ и } x \not\succ y\}$$

замкнуто.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (a) Было доказано (см. B.II, теорема 2), что множество $\mathcal{F}(\mathbf{R}^{2l})$, наделенное топологией замкнутой сходимости $\mathcal{J}_c$, является компактным и метризуемым. Для доказательства компактности и метризуемости $(\mathcal{P}, \mathcal{J}_c)$ достаточно показать (ср. B.I, (7), (15)), что $\mathcal{P}$ является замкнутым подмножеством в $(\mathcal{F}(\mathbf{R}^{2l}), \mathcal{J}_c)$. Пусть $(X_n, \succ_n)$ – последовательность в $\mathcal{P}$, а F – замкнутый предел последовательности (F_n), где

$$F_n := \{(x, y) \in X_n \times X_n \mid x \not\succ_n y\}.$$

Нам нужно доказать (см. B.II, теорема 2(c)), что отношение предпочтения $(X, \succ)$ принадлежит $\mathcal{P}$, где $X := \{x \in \mathbf{R}^l \mid (x, x) \in F\}$ и $\succ := (X \times X) \setminus F$.

Из $\mathrm{Li}(F_n) = F = \mathrm{Ls}(F_n)$ следует, что множество X является замкнутым пределом последовательности (X_n). Множество X непусто, поскольку каждое множество X_n принадлежит X, и поэтому пересекается с данным компактным множеством. Каждое множество потребления X_n выпуклое, поэтому и замкнутый предел X – выпуклое множество. Действительно, пусть $x, y \in X$ и $0 < \lambda < 1$. Поскольку $X = \mathrm{Li}(X_n)$, существуют последовательности (x_n) и (y_n), которые сходятся соответственно к x и y и для которых $x_n \in X_n$ и $y_n \in X_n$. В силу выпуклости X_n имеем $\lambda_n x_n + (1 - \lambda) y_n \in X_n$. Следовательно, $\lambda x + (1 - \lambda) y \in \mathrm{Li}(X_n) = X$. Теперь легко доказывается, что $X \in \mathcal{X}$.

Покажем, что отношение $\succ$ на X является иррефлексивным. Пусть $x \in X$. Тогда существует сходящаяся к x последовательность (x_n), в которой $x_n \in X_n$. Так как отношение $\succ_n$ иррефлексивно, должно быть $(x_n, x_n) \in F_n$. Поэтому, учитывая, что $\mathrm{Li}(F_n) = F$, имеем $(x, x) \in F$, и, следовательно, $x \not\succ x$.

Покажем, далее, что отношение $\succ$ транзитивно. Пусть $x \succ y$ и $y \succ z$. Предположим, что $x \not\succ z$, т.е. $(x, z) \in F$. Так как $\mathrm{Li}(F_n) = F$, существует последовательность $(x_n, z_n) \in F_n$, для которой $(x_n, z_n) \to (x, z)$. Теперь для достаточно больших n оказывается $(x_n, y_n) \notin F_n$ и $(y_n, z_n) \notin F_n$, где y_n – произвольная сходящаяся к y последовательность с $y_n \in X$. В самом деле, если бы это было не так, то было бы $(x, y) \in \mathrm{Ls}(F_n) = F$ или $(y, z) \in F$, а это противоречит тому, что $x \succ y$ и $y \succ z$. Из транзитивности $\succ_n$ получаем $(x_n, z_n) \notin F_n$, т.е. противоречие.

(b) Из B.II (теорема 2) получаем нужную характеризацию сходимости в $(\mathcal{P}, \mathcal{T}_c)$.

(c) Так как пространство $(\mathcal{P}, \mathcal{T}_c)$ является компактным, любая более грубая хаусдорфова топология на $\mathcal{P}$ совпадает с $\mathcal{T}_c$ (см. B.I, (18)).

Таким образом, нам остается показать, что множество

$$\{(X, \succ, x, y) \mid x, y \in X \text{ и } x \not\succ y\}$$

является замкнутым в $(\mathcal{P}, \mathcal{T}_c) \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l$. Пусть $(X_n, \succ_n, x_n, y_n) \to$ $\to (X, \succ, x, y)$, где $x_n, y_n \in X_n$ и $x_n \not\succ y_n$. Тогда $(x_n, y_n) \in F_n$, откуда следует, что $(x, y) \in \mathrm{Li}(F_n) = F$, т.е. $x, y \in X$ и $x \not\succ y$. Теорема доказана.

Для облегчения последующих ссылок сформулируем три непосредственных следствия из теоремы 1.

Следствие 1. *Соответствие множества потребления $(X, \succ) \mapsto X$ из $\mathcal{P}$ в $\mathbf{R}^l$ является замкнутым и полунепрерывным снизу.*

Следствие 2. *Множество*

$$\{(X, \succ, x, y) \in \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l \mid x, y \in X \text{ и } x \succ y\}$$

является борелевским подмножеством в $\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l$.

Следствие 3. *Пусть $(X, \succ) \in \mathcal{P}$, $x, y \in X$ и $x \succ y$. Тогда существуют такие окрестности U, U_x и U_y соответственно элементов $(X, \succ)$ в $\mathcal{P}$, x и y в $\mathbf{R}^l$, что $x' \succ' y'$ для каждого $(X', \succ') \in U$, $x' \in U_x \cap X'$ и $y' \in U_y \cap X'$.*

Замечание. Подчеркнем, что подмножества $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}}$, $\mathcal{P}_{\mathrm{lns}}$ и $\mathcal{P}^*$ множества $\mathcal{P}$ не являются замкнутыми (задача 3), а замыкание $\mathcal{P}^*$ отлично от $\mathcal{P}$.

В последующих главах нам иногда придется предполагать, что предпочтения принадлежат подмножествам $\mathcal{P}$ (например, $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}}$ или $\mathcal{P}_{\mathrm{sco}}$). В таких случаях оказывается важно знать (по техническим причинам, связанным с теорией меры), что эти подмножества являются фактически борелевскими подмножествами компактного пространства $\mathcal{P}$. (Например, тогда любая мера окажется плотной.) Докажем поэтому следующую лемму.

Лемма. *Подмножества $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}}$, $\mathcal{P}^*$, $\mathcal{P}_{\mathrm{co}}$ и $\mathcal{P}_{\mathrm{sco}}$ являются G_δ-множествами (т.е. счетными пересечениями открытых множеств из $\mathcal{P}$) и тем самым борелевскими множествами.*

Доказательство. Для любых целых положительных n и m определим множество

$$\mathcal{P}_{nm} = \{(\succ, X) \in \mathcal{P} \mid \text{ существуют такие } x, y \in X,$$
$$\text{что } |x| \leq n,\ |y| \leq n,\ x \not\succ y,\ x \geq y \text{ и } |x - y| \geq 1/m\}.$$

Легко проверить, что $\mathcal{P}_{nm}$ замкнуто в $\mathcal{P}$. Поскольку

$$\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{\mathrm{mo}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}_{nm},$$

мы получаем, что $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}}$ является G_δ-множеством. Доказательство для других множеств составляет содержание задачи 4.

Свойства непрерывности индивидуального спроса.

Утверждение 1. *Отношение бюджетного множества β из $\mathcal{P} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^l$ в $\mathbf{R}^l$ является замкнутым, а также полунепрерывным снизу в каждой точке (X, w, p), где* $\inf p \cdot X < w$.

Доказательство. Напомним, что бюджетное множество определяется как

$$\beta(X, w, p) = \{ x \in X \mid px \leqq w \}.$$

Таким образом, отношение бюджетного множества β является пересечением соответствия множества потребления X и соответствия

$$(X, w, p) \mapsto \{ x \in \mathbf{R}^l \mid px \leqq w \}.$$

Поскольку оба соответствия замкнуты (следствие 1), β также является замкнутым.

Чтобы доказать полунепрерывность β снизу, рассмотрим сначала отношение $\mathring{\beta}$, определенное как

$$\mathring{\beta}(X, w, p) := \{ x \in X \mid px < w \}.$$

По предположенному существует вектор $x \in \mathring{\beta}(X, w, p)$. Пусть $(X_n, \succ_n, w_n, p_n)$ – произвольная последовательность, сходящаяся к $(X, \succ, w, p)$. В силу следствия 1 соответствие множества потребления X является полунепрерывным снизу. Таким образом, существует такая последовательность (x_n), сходящаяся к x, что $x_n \in X_n$. Ясно, что $px < w$ влечет $p_n x_n < w_n$ при достаточно больших значениях n. Следовательно, для достаточно больших n $x_n \in \mathring{\beta}(X_n, w_n, p_n)$, что доказывает (В.III, теорема 2) полунепрерывность снизу отношения $\mathring{\beta}$ в точке (X, w, p). Выпуклость множества потребления X влечет $\beta(X, w, p) = \mathrm{cl}\, \mathring{\beta}(X, w, p)$. Утверждение 1 следует теперь из того, что замыкание полунепрерывного снизу соответствия также является полунепрерывным снизу.

Легко показать, что условие $\inf p \cdot X < w$ не может быть заменено на более слабое $pX \leqq w$.

Пример (рис. 1.5). $X = \mathbf{R}^2_+$, $w_n \to 0 = w$, $p_n \to (0, 1) =: p$, $\beta(\mathbf{R}^2_+, w, p) = [0, \infty)$.

Теорема 2. *Отношение спроса φ из $\mathcal{P} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^l$ в $\mathbf{R}^l$ является непусто- и компактнозначным, а также полунепрерывным снизу в каждой точке $(X, \succ, w, p)$, в которой бюджетное множество $\beta(X, w, p)$ компактно и* $\inf p \cdot X < w$

Доказательство. На основании предложения 1 отношение бюджетного множества β является замкнутым и полунепрерывным снизу в (X, w, p). Поскольку бюджетное множество выпукло и компактно, из леммы из B.III следует, что отношение бюджетного множества непрерывно в точке (X, w, p).

Пусть $S = \mathscr{P} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^l$. Из теоремы 1(с) и предложения 1 следует, что множество

$$\{(s, x, y) \in S \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l \mid x, y \in \beta(s) \text{ и } x \nsucc_s y\}$$

является замкнутым в $S \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l$. Поэтому можно применить теорему 3 из B.III, и требуемое доказано.

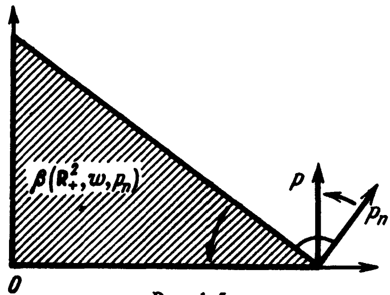

Рис. 1.5

Легко показывается, что в условиях теоремы 2 отношение спроса φ является непрерывным в точке $(X, \succ, w, p)$ в том и только том случае, когда множество спроса $\varphi(X, \succ, w, p)$ состоит ровно из одного элемента (что выполняется, например, если отношение предпочтения $(X, \succ)$ строго выпукло). Даже при фиксированном отношении предпочтения $(X, \succ)$ отношение спроса φ не является, вообще говоря, полунепрерывным снизу по w и p. Однако в теореме 4 из B.III мы показали, что "более чем ϵ-разрывы" компактнозначного и полунепрерывного сверху соответствия являются "редкими", т.е. они принадлежат замкнутому, нигде не плотному подмножеству. Например, если $\mathscr{P}_L$ обозначает множество предпочтений $\succ$ в $\mathscr{P}$, определенных на $\mathbf{R}_+^l$, то сужение соответствия спроса φ на $\mathscr{P}_L \times (0, \infty) \times (0, \infty)^l$ является по теореме 2 компактнозначным и полунепрерывным сверху. Следовательно, по теореме 4 из B.III для любого $\epsilon > 0$ существует открытое и плотное подмножество $G \subset \mathscr{P}_L \times (0, \infty) \times (0, \infty)^l$, в любой точке $t = (\succ, w, p)$ которого разрыв множества спроса $\varphi(t)$ меньше, чем ϵ, т.е. для любой последовательности $t_n \to t$ для достаточно больших n выполняется включение $\varphi(t) \subset B_\epsilon(\varphi(t_n))$. Следовательно, соответствие спроса φ непрерывно на счетном пересечении открытого и плотного подмножеств. Заметим, что это пересечение снова является плотным, так как $\mathscr{P}_L$ компактно (теорема Бэра).

Приведенные выше аргументы можно использовать, чтобы показать, что для любого вектора цен $p > 0$ и любого $\epsilon > 0$ существует такое открытое и плотное, зависящее от p и ϵ подмножество G потребительских характеристик в $\mathscr{P}_L^* \times (0, \infty)$, что диаметр множества спроса $\varphi(\precsim, w, p)$ оказывается не больше, чем ϵ, для любой $(\precsim, w)$ из G. Это значит, что если для конкретного потребления характеристика $(\precsim^*, w^*)$ такова, что $\operatorname{diam} \varphi(\precsim^*, w^*, p) \leq \epsilon$, то для *достаточно близкой* к ней характеристики $(\precsim, w)$ все еще $\operatorname{diam} \varphi(\precsim, w, p) \leq \epsilon$, и, далее, если характеристика $(\precsim^*, w^*)$ такова, что $\operatorname{diam} \varphi(\precsim^*, w^*, p) > \epsilon$, то *сколь угодно малого* отклонения от $(\precsim^*, w^*)$ к

$(\precsim, w)$ достаточно для получения $\operatorname{diam} \varphi(\precsim, w, p) \leqq \epsilon$ В этом смысле мы и понимаем утверждение: диаметр множества спроса $\varphi(\precsim, w, p)$ "в общем", или "обычно", не превосходит ϵ.

Следствие. *Пусть $\mathscr{P}^*_L$ означает множество отношений нестрогого предпочтения $\precsim$ в $\mathscr{P}^*$, определенных на $\mathbf{R}^l_+$. Тогда для любого вектора цен $p > 0$ и $\epsilon > 0$ существует такое открытое и плотное подмножество $\tilde{G} \subset \mathscr{P}^*_L \times (0, \infty)$, что*

$$\operatorname{diam} \varphi(\precsim, w, p) \leqq \epsilon \text{ для любой } (\precsim, w) \in G.$$

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что соответствие спроса $\varphi(\cdot, \cdot, p)$ является компактнозначным и полунепрерывным сверху. По теореме 4 из В.III существует такое открытое и плотное подмножество $G \subset \mathscr{P}^*_L \times (0, \infty)$, что для любого $t \in G$ и любой последовательности $t_n \to t$ при достаточно больших n выполняется включение $\varphi(t) \subset B_n(\varphi(t_n, p))$.

Но для любой характеристики $(\precsim, w) = t$ можно найти такую сходящуюся к t последовательность (t_n), что множество $\varphi(t_n, p)$ состоит ровно из одного элемента. Поэтому диаметр множества $\varphi(t)$ не может превосходить ϵ. Теорема доказана.

В оставшейся части этого параграфа мы исследуем отношение спроса φ в точках, в которых бюджетное множество $\beta(X, w, p)$ может быть некомпактным или же может не выполняться условие $\inf p \cdot X < w$.

Утверждение 2. *Отношение спроса φ из $\mathscr{P} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^l$ в $\mathbf{R}^l$ является борелевским, т.е. множество*

$$\{(X, \succ, w, p, x) \in \mathscr{P} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l \mid x \in \varphi(X, \succ, w, p)\}$$

является борелевским подмножеством в $\mathscr{P} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l$.

Доказательство. Пусть $T := \mathscr{P} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^l$. Отношение β из T в $\mathbf{R}^l$ для любого замкнутого подмножества $F \subset \mathbf{R}^l$ обладает следующим свойством:

$$\beta^{-1}(F) = \{t \in T \mid \beta(t) \cap F \neq \phi\} \text{ принадлежит } \mathscr{B}(T).$$

Действительно, достаточно показать, что $\beta^{-1}(K)$ для любого компактного подмножества K из $\mathbf{R}^l$ принадлежит $\mathscr{B}(T)$. В силу утверждения 1 график отношения является замкнутым, и, следовательно, множество $\beta^{-1}(K)$ замкнуто. Пусть $T' = \{t \in T \mid \beta(t) \neq \phi\}$. Ясно, что $T' \in \mathscr{B}(T)$.

Существует (D.II.2, следствие из леммы 1) такая последовательность (f_n) измеримых функций из T' в $\mathbf{R}^l$, что

$$\beta(t) = \operatorname{cl}\{f_n(t) \mid n = 1, \dots\}$$

для любого $t \in T'$. Положим

$$\psi_n(t) := \{x \in \beta(t) \mid f_n(t) \nsucc x\}, \quad n = 1, \dots$$

График F_n отношения ψ_n является борелевским подмножеством $T \times \mathbf{R}^l$. Действительно, по теореме 1 (с) множество

$$\{(X, \succ, x, y) \in \mathscr{P} \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l \mid x, y \in X \text{ и } x \nsucc y\}$$

замкнуто. Следовательно, в силу утверждения 1 множество

$$F := \{(t, x, y) \in T' \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l \mid x, y \in \beta(t) \text{ и } x \nsucc_t y\}$$

замкнуто в $T' \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l$. Пусть h_n является отображением $(t, x) \mapsto h_n(t, x) := := (t, f_n(t), x)$. Тогда должно быть $F_n = h_n(F)$. Поскольку f_n является измеримым отображением из T' в $\mathbf{R}^l$, отображение h_n измеримо по Борелю (D.I, (2) и (4)). Таким образом, F_n принадлежит $\mathcal{B}(T' \times \mathbf{R}^l)$ и поэтому принадлежит также $\mathcal{B}(T \times \mathbf{R}^l)$.

Нам осталось показать, что $\varphi(t) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \psi_n(t)$. Очевидно, $\varphi(t) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \psi_n(t)$. С другой стороны, пусть $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \psi_n(t)$, но $x \notin \varphi(t)$. Тогда найдется вектор $y \in \beta(t)$, для которого $y \succ_t x$. Множество $\{z \in \beta(t) \mid z \succ_t x\}$ является открытым относительно $\beta(t)$. Следовательно, существует целое $\bar{n}$, для которого $f_{\bar{n}}(t) \succ_t x$, т.е. $x \notin \psi_{\bar{n}}(t)$, и мы получили противоречие. Утверждение доказано.

Утверждение 3. *Отношение спроса φ является замкнутым в каждой точке $(X, \succ, w, p) \in \mathcal{P} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^l$, где* $\inf p \cdot X < w$.

Доказательство. Пусть $t_n := (X_n, \succ_n, w_n, p_n) \to (X, \succ, w, p) =: t$ и $x_n \in \varphi(t_n)$, где $x_n \to x$. Мы должны показать, что $x \in \varphi(t)$. Должно быть $x \in \beta(t)$, поскольку, согласно утверждению 1, β является замкнутым. Пусть $z \in X$ и $pz < w$. Поскольку соответствие множества потребления X является полунепрерывным снизу, существует последовательность (z_n), сходящаяся к z с элементами $z_n \in X_n$. Таким образом, для достаточно больших n мы имеем $p_n z_n < w_n$. Следовательно, $z_n \not\succ_n x_n$, что по теореме 1 (c) влечет $z \not\succ x$.

Пусть теперь $z \in X$ и $pz = w$. Поскольку по условию существует вектор $z' \in X$, для которого $pz' < w$, бюджетное множество выпукло, z должно быть пределом последовательности точек z_n бюджетного множества $pz_n < w$. Следовательно, $z_n \not\succ x$, что влечет $z \not\succ x$.

Следствие 1. *Пусть последовательность $(X_n, \succ_n, w_n, p_n)$ сходится к $(\mathbf{R}^l_+, \succ, w, p)$; предположим, что $\succ \in \mathcal{P}_{\mathrm{mo}}$, $w > 0$, $p > 0$ и вектор p не является строго положительным. Тогда*

$$\inf \{ |x| \mid x \in \varphi(X_n, \succ_n, w_n, p_n)\}_n \to \infty.$$

Доказательство. Предположим, что это следствие неверно. Тогда существует такое ограниченное множество B в $\mathbf{R}^l$, что для бесконечно большого числа номеров n должно быть $\varphi(X_n, \succ_n, w_n, p_n) \cap B \neq \phi$. Пусть $y_n \in \varphi(X_n, \succ_n, w_n, p_n) \cap B$. Существует сходящаяся подпоследовательность, скажем $y_n \to y$. Поскольку $\inf p \cdot \mathbf{R}^l_+ = 0 < w$, из утверждения 3 следует, что $y \in \varphi(\mathbf{R}^l_+, \succ, w, p)$, а это невозможно. Действительно, это множество пусто, так как $\succ \in \mathcal{P}_{\mathrm{mo}}$, а бюджетное множество $\beta(\mathbf{R}^l_+, w, p)$ не ограничено. Следствие доказано.

При анализе равновесия вектор цен p является неизвестной переменной, подлежащей определению. Поэтому, не делая строгих предположений, мы не можем априори установить, выполнено ли условие $\inf p \cdot X < w$. Например, если величина богатства w выводится с учетом цен p из величины первоначальных запасов e, т.е. $w = p \cdot e$, то из предположения $e \in X$ следует только, что $\inf p \cdot X \leqq w$. Чтобы усилить это до $\inf p \cdot X < w$, необходимо предположить, что $e \in \operatorname{int}(X)$, а это является весьма сильным предположением. Фактически оказывается, что в большинстве рассматриваемых в дальнейшем моделей *для равновесных цен* это условие выполняется. По этим соображениям вводится следующее искусственное понятие, которое следует рассматривать только как техническое средство, используемое при доказательствах.

Следствие 2. *Отношение квазиспроса* $\tilde{\varphi}$ *из* $\mathcal{P} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^l$ *в* $\mathbf{R}^l$, *определяемое как*

$$\tilde{\varphi}(X, \succ, w, p) := \begin{cases} \varphi(X, \succ, w, p), & \text{если} \quad \inf pX < w, \\ \beta(X, \succ, w, p), & \text{если} \quad \inf pX \geqslant w, \end{cases}$$

является замкнутым.

Доказательство. Пусть

$$t_n := (X_n, \succ_n, w_n, p_n) \to (X, \succ, w, p) =: t$$

и $x_n \to x$, где $x_n \in \tilde{\varphi}(t_n)$. Если $\inf p \cdot X < w$, то из следствия 1, теоремы 1 и утверждения 11 из B.III следует, что для достаточно больших n должно быть $\inf p_n \cdot X_n < w_n$. Следовательно, $\tilde{\varphi}(t_n) = \varphi(t_n)$ и утверждение 3 влечет $x \in \tilde{\varphi}(t)$. Если $\inf pX \geqslant w$, то остается доказать только, что $x \in \beta(t)$. Поскольку $\tilde{\varphi}(t_n) \subset \beta(t_n)$ и поскольку по утверждению 1 соответствие бюджетного множества замкнуто, мы имеем $x \in \beta(t)$. Следствие доказано.

Задачи

Задача 1. Пусть $(\mathbf{R}^l_+, \succ_n)$ и $(\mathbf{R}^l_+, \succ)$ принадлежат $\mathcal{P}^*_{\mathrm{lns}}$, а u_n и u – паретовские функции полезности соответственно для $\succ_n$ и $\succ$. Показать, что последовательность $(\mathbf{R}^l_+, \succ_n)$ сходится к $(\mathbf{R}^l_+, \succ)$ в $(\mathcal{P}, \mathcal{T}_c)$, если последовательность (u_n) сходится равномерно на компактных множествах из $\mathbf{R}^l_+$. Показать, что предположение о локальной ненасыщаемости не может быть здесь снято.

Задача 2. Доказать, что последовательность $(X_n, \succ_n)$ сходится к $(X, \succ)$ из $(\mathcal{P}^*_{\mathrm{lns}}, \mathcal{T}_c)$ в том и только том случае, если $\mathrm{Ls}(F_n) \subset F$, где

$$F_n = \{(x, y) \in X \times X \mid x \not\succ_n y\}.$$

Задача 3. Показать на примере, что $\mathcal{P}^*$, $\mathcal{P}_{\mathrm{lns}}$ и $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}}$ не являются замкнутыми подмножествами $\mathcal{P}$. Кроме того, показать, что $\mathrm{cl}\, \mathcal{P}^* \neq \mathcal{P}$, $\mathrm{cl}\, \mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \neq \mathcal{P}_{\mathrm{wmo}}$ и $\mathrm{cl}\, \mathcal{P}^*_{\mathrm{mo}} = \mathcal{P}^*_{\mathrm{wmo}}$. Вместе с тем, $\mathcal{P}_{\mathrm{wmo}}$ компактно и $\mathcal{P}^*_{\mathrm{co}}$ замкнуто в $\mathcal{P}^*$ (Гродал, 1974).

Задача 4. Показать, что подмножества $\mathcal{P}^*$, $\mathcal{P}^*_{\mathrm{co}}$ и $\mathcal{P}^*_{\mathrm{sco}}$ суть множества G_δ в $\mathcal{P}$.

Указание. Воспользоваться тем, что $(\succ, x) \notin \mathcal{P}^*$, если существуют такие $x, y, z \in X$, для которых $x \not\succ y$, $y \not\succ z$ и $x \prec z$. Для произвольных n, m положим

$\mathcal{P}_{nm} = \{(\succ, x) \in \mathcal{P} \mid$ существуют $x, y, z \in X$ такие, что $|x| \leqslant n$, $|y| \leqslant n$, $|z| \leqslant n$, $x \not\succ y$, $y \not\succ z$ и $B_{1/m}(x) \cap X \prec B_{1/m}(z) \cap X\}$.

Показать, что $\mathcal{P}_{nm}$ замкнуто и $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{nm}$. Для множества $\mathcal{P}^*_{sco}$ рассмотрим множество

$\mathcal{P}_{nmk} = \{(\succ, X) \in \mathcal{P} \mid$ существуют $x, y \in X$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ такие, что $|x| \leqslant \leqslant n$, $|y| \leqslant n$, $|x - y| \geqslant 1/m$, $1/k \leqslant \lambda \leqslant 1 - 1/k$, $x \not\succ y$, $y \prec x$ и $x \not\succ \alpha x + (1 - \alpha) y\}$.

Проверить, что $\mathcal{P}_{nmk}$ замкнуто в $\mathcal{P}$, а

$$\mathcal{P}_{sco} = \mathcal{P}^* \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \neq \mathcal{P}_{nmk}$$

(Гродал, 1974).

З а д а ч а 5 (приближение выпуклых предпочтений строго выпуклыми предпочтениями). Показать, что подпространство $\mathcal{P}^*_{\substack{mo\\sco}}$ является плотным в $\mathcal{P}^*_{\substack{mo\\co}}$. (Можно даже показать, что любое отношение предпочтения $\precsim \in \mathcal{P}^*_{\substack{mo\\sco}}$ является пределом такой последовательности отношений $(\precsim_n)$ из $\mathcal{P}^*_{\substack{mo\\sco}}$, что (a) каждое отношение $\precsim_n$ представимо непрерывной функцией полезности и (b) каждая функция спроса $\varphi(\succsim_n, e \cdot p, p)$ дифференцируема по p (Каннаи, 1974; Мак-Колел, 1974).)

З а д а ч а 6. Показать, что предбазис топологий замкнутой сходимости на $\mathcal{P}^*_{mo}$ задается множеством вида

$\{\succ \in \mathcal{P}^*_{mo} \mid x \succ y$ для любых $x \in S$ и $y \in T\}$,

где S и T – замкнутые шары в $\mathbf{R}^l_+$ с рациональными радиусами и рациональным центром. Показать, что топология замкнутой сходимости является самой грубой хаусдорфовой топологией на $\mathcal{P}^*_{mo}$, обладающей тем свойством, что множество

$\{(\succ, x, y) \in \mathcal{P}^*_{mo} \times \mathbf{R}^l_+ \times \mathbf{R}^l_+ \mid x \succ y\}$

открыто в $\mathcal{P}^*_{mo} \times \mathbf{R}^l_+ \times \mathbf{R}^l_+$ (Каннаи, 1970).

З а д а ч а 7 (непрерывная полезность).

(a) Показать, что существует такая непрерывная функция u на $\mathcal{P}^*_{mo} \times \times \mathbf{R}^l_+$ со значениями в $\mathbf{R}$, что для любого отношения $\precsim \in \mathcal{P}^*_{mo}$ функция $u(\precsim, \cdot): \mathbf{R}^l_+ \to \mathbf{R}$ является функцией полезности для $\precsim$, т.е. $x \precsim y$ тогда и только тогда, когда $u(\precsim, x) \leqslant (\precsim, y)$.

У к а з а н и е. Взять

$u(\precsim, x) := \max \{\xi \in \mathbf{R}^l_+ \mid (\xi) \precsim x\}$.

(b) Пусть $\mathcal{P}^*_1$ является подмножеством множества $\mathcal{P}^*$, для которого (1) $\operatorname{int}(X) \neq \phi$ и (2) любой класс безразличия имеет нулевую меру Лебега. Показать, что существует непрерывная функция u: $G \to \mathbf{R}$, для которой $u(\precsim, \cdot): X \to \mathbf{R}$ является функцией полезности отношения $(X, \precsim)$, где

$G = \{(X, \precsim, x) \in \mathcal{P}^*_1 \times \mathbf{R}^l \mid x \in X\}$, У к а з а н и е. Положить $u(\precsim, x) := \lambda(\{z \in X \mid z \precsim x\})$, где λ означает произвольную ограниченную меру на $\mathbf{R}^l$, абсолютно непрерывную относительно меры Лебега на $\mathbf{R}^l$ (Нойефайнд, 1972).

З а д а ч а 8. Показать, что топология замкнутой сходимости может быть метризована на $\mathscr{P}^*_{\mathrm{mo}}$ посредством следующей метрики:

$$\rho(\precsim, \precsim') := \max \frac{|u(\precsim, x) - u(\precsim', x)|}{1 + |x|^2},$$

где $u(\cdot, \cdot)$ означает функцию полезности, определенную в задаче 7(a) (Каннаи, 1971).

З а д а ч а 9 (измеримая полезность u). Пусть G является графиком соответствия потребительского множества, т.е.

$$G = \{(X, \precsim, x) \in \mathscr{P}^* \times \mathbf{R}^l \mid x \in X\}.$$

Показать, что существует такая измеримая по Борелю функция u: $G \to \mathbf{R}$, что $u(\precsim, \cdot)$: $X \to \mathbf{R}$ является функцией полезности для $\precsim$ (Ауман, 1969).

З а д а ч а 10. Показать, что функция

$$\varphi(\cdot, w, p) \colon \mathscr{P}^*_{\mathrm{sco}} \to \mathbf{R}^l$$

не является равномерно непрерывной.

З а д а ч а 11 (выпуклое замыкание предпочтений). Показать, что отображение $\precsim \to \dot{\precsim}$, определенное в задаче 7, § 1.1, является непрерывным на $\mathscr{P}^*_{\mathrm{mo}}$.

З а д а ч а 12 (ϵ-спрос). Для любых $\epsilon > 0$ и $(\precsim, w, p) \in \mathscr{P}^*_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^l$ определим множество

$$\varphi^\epsilon(\precsim, w, p) := \mathrm{cl}\,\{x \in \mathbf{R}^l_+ \mid px = w \text{ и } x > y \text{ для любого } y \geqslant 0 \text{ такого, что } py \leqq w - \epsilon\,|p|\}.$$

(a) Доказать, что для любого $\epsilon > 0$ соответствие φ^ϵ из $\mathscr{P}^*_{\mathrm{mo}} \times (0, \infty) \times (0, \infty)^l$ в $\mathbf{R}^l$ является полунепрерывным снизу и включает соответствие спроса φ, т.е. $\varphi \subset \varphi^\epsilon$.

У к а з а н и е. Показать, что соответствие ψ из $\mathscr{P}^*_{\mathrm{mo}} \times (0, \infty) \times (0, \infty)^l$ в $(0, \infty)^l$ открыто, где

$$\psi(\precsim, w, p) := \{x \in (0, \infty)^l \mid x \succ y \text{ для любого } y \in \mathbf{R}^l_+ \text{ такого, что } py \leqq w - \epsilon\,|p|\}.$$

Вывести отсюда полунепрерывность снизу соответствия

$$(\precsim, w, p) \mapsto \psi(\precsim, w, p) \cap \{x \in \mathbf{R}^l_+ \mid px = w\}.$$

(b) Показать, что при любом непрерывном отношении предпочтения $\succsim$ на $\mathbf{R}^l_+$ и $w \geqslant 0$, $p > 0$ замыкание $\bar{\varphi}^\epsilon$ соответствия φ^ϵ является непрерывным (т.е. полунепрерывным сверху и полунепрерывным снизу).

У к а з а н и е. Показать, что

$$\bar{\varphi}^\epsilon(\precsim, w, p) = \{x \in \mathbf{R}^l_+ \mid px = w \text{ и } x \succsim y \text{ для любого } y \in \mathbf{R}^l_+ \text{ такого, что } py \leqq w - \epsilon\,|p|\}.$$

Вывести из этого полунепрерывность сверху $\bar{\varphi}^\epsilon$.

(c) Дать определение ϵ-спроса для отношений предпочтений из $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}}$ таким образом, чтобы φ^ϵ было полунепрерывным снизу.

Задача 13. Пусть U – открытое подмножество декартова произведения $\mathcal{P}^*_{\mathrm{mo}} \times \mathcal{P}^*_{\mathrm{mo}}$, содержащее его диагональ. Для любого $(\precsim, w, p) \in \mathcal{P}^*_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_+ \times (0, \infty)^l$ определим множество U-спроса:

$$\varphi^U(\precsim, w, p) := \bigcup_{(\precsim', \precsim) \in U} \varphi(\precsim', w, p).$$

Доказать, что соответствие U-спроса φ^U из $\mathcal{P}^*_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_+ \times (0, \infty)^l$ в $\mathbf{R}^l$ является полунепрерывным снизу.

Указание. Пусть $(\succ_n, w_n, p_n) \to (\succ, w, p)$ и $x \in \varphi^n(\succ, w, p)$. Необходимо показать, что существует последовательность (x_n), для которой $x_n = x$ и $x_n \in \varphi^U(\succ_n, w_n, p_n)$. Случай, когда $w = 0$, тривиален. Если $w > 0$, рассмотреть линейное отображение $\mathbf{R}^l$ в $\mathbf{R}^l$, определенное матрицей

$$M_n = \begin{pmatrix} p^1/p_n^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p^l/p_n^l \end{pmatrix}.$$

Положив $x_n := \dfrac{w_n}{w} \cdot M_n(x)$, показать, что для достаточно больших n должно быть $x_n \in \varphi^U(\succ_n, w_n, p_n)$. Это устанавливается следующим образом: существует такое $\succ'$, что $(\succ', \succ) \in U$ и $x \in \varphi(\succ', w, p)$. Теперь можно построить последовательность $(\succ'_n)$, полагая $x \succ'_n y$ в том и только том случае, когда

$$\frac{w}{w_n} \cdot M_n^{-1}(x) \succ' \frac{w}{w_n} \cdot M_n^{-1}(y).$$

Показать, что для достаточно больших n должно быть

$x_n \in \varphi(\succ'_n, w_n, p_n)$ и $(\succ'_n, \succ_n) \in U$.

Примечания к § 1.2

В литографированной рукописи (опубликована в 1970 г.) Каннаи в 1964 г. ввел метрику на пространстве монотонных предпочтений $\mathcal{P}^*_{\mathrm{mo}}$. Он представил каждое отношение предпочтения функцией полезности (см. задачу 7) и определил метрику на $\mathcal{P}^*_{\mathrm{mo}}$ в терминах этих функций полезности (см. задачу 8). Топология, введенная таким образом, совпадает на $\mathcal{P}^*_{\mathrm{mo}}$ с топологией замкнутой сходимости, введенной в этой главе (эта топология была предложена Мертенсом, 1970). Каннаи использовал метрику на $\mathcal{P}^*_{\mathrm{mo}}$ для доказательства свойств непрерывности ядра экономики; он не рассматривал ее связи с теорией спроса.

Полунепрерывность сверху соответствия спроса φ (теорема 2) была установлена Дебре (1969). Однако Дебре вводил топологию на множестве предпочтений $\mathcal{P}^*$ с помощью расстояния по Хаусдорфу. Топология, определяемая на $\mathcal{P}^*$ таким образом, тоньше, чем топология замкнутой сходимости, и не является в общем случае сепарабельной. Так как для нас эта сепарабельность в дальнейшем будет существенной, мы не будем вводить топологии на основании метрики по Хаусдорфу, что было бы намного проще. Дебре доказывает полунепрерывность сверху соответствия спроса φ в значительно более широком контексте, чем мы это делаем здесь. Приведенные в этом параграфе доказательства являются несколько иными.

Необходимо отметить, что полунепрерывность сверху φ по богатству и ценам при фиксированном отношении предпочтения из $\mathcal{P}^*$ была уже доказана в литературе, посвященной анализу равновесия. Для заданного отношения предпочтений, определяемого функцией полезности, теорема 2 содержится в работе Эрроу и Дебре (1954, замечание на с. 278), а утверждение 3 появилось впервые у Дебре (1953). Доказательство утверждения 3, опирающееся непосредственно на отношения предпочтения без использования показателя полезности, было дано Мак-Кензи (1959).

Понятие квазиспроса было введено Дебре (1962).

§ 1.3. Средний спрос

Потребительский сектор. Будем рассматривать конечное множество A потребителей a, каждый из которых описывается своим *множеством потребления* X_a, *отношением предпочтения* $\succ_a$ и *богатством* w_a. В принятых нами терминах это означает, что рассматривается отображение s конечного множества A в $\mathcal{P} \times \mathbf{R}$:

$$s\colon\ A \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}.$$

Пусть χ означает нормированную непрерывную меру на A, т.е.

$$\chi(E) = |E| / |A|$$

для любого подмножества E из A. Образ меры μ от χ относительно отображения s называется *распределением* множества потребителей A *по предпочтениям и богатству*. Таким образом, $\mu(B) = \chi(s^{-1}(B))$ обозначает долю тех участников экономики из A, потребительские характеристики которых принадлежат $B \subset \mathcal{P} \times \mathbf{R}$. Частные распределения μ^w на $\mathbf{R}$ и $\mu^{\succ}$ на $\mathcal{P}$ называются соответственно распределением *по богатству* и распределением *по предпочтениям*. Распределение по предпочтениям – богатству может являться, а может и не являться произведением своих частных распределений, т.е. не предполагается, что распределение по богатству не зависит от распределения по предпочтениям.

Если действует система цен p, то множество спроса потребителя a с характеристиками $s(a) \in \mathcal{P} \times \mathbf{R}$ обозначается $\varphi(s(a), p)$.

Следовательно, если действует вектор цен p, то *средний спрос* множества потребителей A задается как

$$\Phi(s, p) := \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \varphi(s(a), p).$$

По определению меры χ получаем

$$\Phi(s, p) = \int_A \varphi(s(\cdot), p)\, d\chi.$$

Ясно, что математически этот интеграл определен и для более общих отображений s и мер χ. На самом деле в дальнейшем мы определим "средний спрос" этой формулой и в более общей ситуации. Сначала, однако, подготовим и обсудим этот шаг абстракции.

При анализе общего равновесия общий спрос малого числа потребителей не вызывает особого интереса. Интересуются обычно совокупным спросом всех потребителей большой экономики. В этом случае, по-видимому, естественно и удобно (по аналитическим соображениям) рассматривать распределение по предпочтениям – богатству μ как неатомическое в пространстве характеристик $\mathcal{P} \times \mathbf{R}$ *). Фактически в эмпирических приложениях предполагалось, что основные типы распределений дохода являются неатомическими (например, распределение по Парето или логарифмически нормальное распределение).

Рассмотрение распределения характеристик участников экономики конечного множества A как неатомического означает, строго говоря, что "фактическое" распределение считается распределением выборки объема $|A|$, извлеченной из "гипотетического" населения. Такая статистическая точка зрения основывается на том хорошо известном факте (D.I, (43)), что выборочные распределения сходятся при увеличении размера выборки к "гипотетическому" распределению. Естественно, остается показать, что экономические понятия, выведенные из "гипотетического распределения" (например, средний спрос), не могут существенно отличаться от понятий, полученных на основе "фактического" распределения. Это представляет основной предмет обсуждений в данном параграфе.

Существует также другая, вероятно, более глубокая причина, по которой следует рассматривать неатомические распределения характеристик участников. Уже сам факт, что участники экономики не все похожи друг на друга, означающий в нашей системе, что носитель распределения по предпочтениям – богатству "расплывается" по множеству $\mathcal{P} \times \mathbf{R}$, может порождать свойства, например, среднего спроса, которые не имели бы места при отсутствии такого разнообразия характеристик участников. Более конкретно, если предпочтения, скажем, из $\mathcal{P}^*$ не являются строго выпуклыми, то средний спрос некоторого множества потребителей в общем случае не определяется однозначно.

Однако, как это показано в следствии к теореме 2, для вектора цен $p > 0$ множество спроса обычно, т.е. в случае большего в топологическом смысле подмножества характеристик $(\lesssim, w)$, имеет малый диаметр. Таким образом, можно надеяться, что при "сильно размытом" распределении потребительских характеристик "большинство" участников имеет малое множество спроса. Конечно, мы не утверждаем, что подмножество, которое является бóльшим с топологической точки зрения (т.е. открытое и плотное), является также бóльшим и с точки зрения теории меры (т.е. вся мера сосредоточена на нем). Тем не менее представляется возможным, должным образом ограничив пространство предпочтений и усилив его топологию, описать класс неатомических распределений μ, при которых множества спроса будут малыми или даже одноэлементными для почти

*) Распределение μ на $\mathcal{P} \times \mathbf{R}$ является неатомическим, если $\mu(X, \succ, w) = 0$ для любого $(X, \succ, w) \in \mathcal{P} \times \mathbf{R}$.

всех (в смысле меры μ) характеристик. Эти рассуждения, разумеется, достаточно неопределенны и нуждаются в пояснении.

Читатель может без труда привести с иллюстративными целями пример такого "гипотетического" распределения μ на $\mathcal{P}^* \times \mathbf{R}$, что для любого $p > 0$ будет $\mu\{t \in \mathcal{P} \times \mathbf{R} \mid \varphi(t,p)$ состоит из одного элемента$\} = 1$, но для любого $p > 0$ существует такое $t \in \operatorname{supp}(\mu)$, что $\varphi(t,p)$ содержит более одного элемента. Следовательно, при данном векторе цен p средний спрос в условиях выборочного распределения является однозначным с вероятностью единица.

Предположение о неатомичности распределений характеристик участников требует, в частности, чтобы участников экономики было "много". Можно сосредоточить внимание только на этом аспекте, не предполагая, что характеристики участников могут быть разнообразными. В гл. 2, где будет рассматриваться теория обмена, мы особенно выделим этот момент. Поэтому здесь мы будем весьма кратки. Если потребителей "много", то решение о потреблении типичного индивидуального потребителя будет оказывать лишь "малое" влияние на совокупный спрос. Ясно, что если мы желаем описать только этот аспект, а именно что влиянием индивидуального потребителя на коллективные действия можно пренебречь, то нам требуется не то, чтобы распределение характеристик участников было неатомическим, а то, чтобы это распределение было извлечено из "очень большого" множества участников экономики.

Предыдущее обсуждение мотивирует следующее определение.

О п р е д е л е н и е 5. *Потребительским сектором* *) называется такое измеримое отображение s пространства с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$ в пространство $\mathcal{P} \times \mathbf{R}$ характеристик спроса, что среднее богатство $\int \mathbf{W} \circ s d\nu$ является конечным.

Потребительский сектор называется:

простым, если измеримое пространство $(A, \mathcal{A}, \nu)$ является простым, т.е. A — конечное множество, $\mathcal{A}$ — семейство всех подмножеств A и $\nu(E) = |E| / |A|$, $E \subset A$;

неатомическим, если пространство с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$ является неатомическим, т.е. для любого $E \in \mathcal{A}$, для которого $\nu(E) > 0$, существует множество $S \subset E$, для которого $0 < \nu(S) < \nu(E)$;

выпуклым, если почти все потребители любого атома пространства с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$ имеют выпуклые предпочтения.

В соответствии с этим определением неатомический потребительский сектор всегда является выпуклым.

О б о з н а ч е н и е. Произвольный элемент множества A потребительского сектора называется *потребителем* a. Пара из отношения предпочтения и богатства потребителя a обозначается $s(a) = (X_{s(a)}, \succ_{s(a)}, w_{s(a)})$. Если ясно, какое отображение s имеется в виду, то будем писать короче: $(X_a, \succ_a, w_a)$. Образ меры $\nu \circ s^{-1}$ называется *распределением по пред-*

*) Мы используем слово "сектор", поскольку богатство (понимаемое здесь как вещественное число) происходит от обладания ресурсами и прибыли от производства, которое пока не было явно введено в рассмотрение. Это будет сделано в последующих главах. Исходный элемент "богатство" был обозначен через w, а $\mathbf{W}$ обозначает проекцию множества $\mathcal{P} \times \mathbf{R}$ на $\mathbf{R}$.

почтениям – богатству потребительского сектора $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}$ и обозначается μ_s или просто μ. При заданном векторе цен $p \in \mathbf{R}^l$ интеграл $\int \varphi(s(\cdot), p) d\nu$ называется *средним спросом* потребительского сектора. Он обозначается через $\Phi(s, p)$.

Смысл и интерпретация *простого* потребительского сектора и производных от него понятий очевидны и в комментариях не нуждаются.

Неатомический потребительский сектор является фактически более абстрактным понятием. Его интерпретация опирается (пока, во всяком

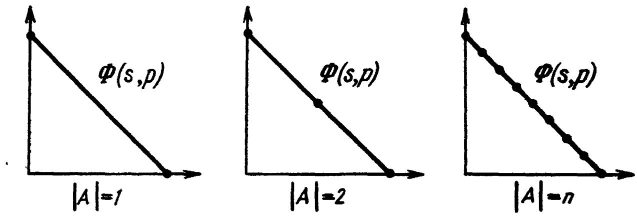

Рис. 1.6

случае) на аналогию со случаем простого потребительского сектора. Оно описывает потребительский сектор с очень большим, несчетно бесконечным множеством потребителей, где каждый индивидуальный потребитель не оказывает ровно никакого влияния на средний спрос. σ-алгебра $\mathcal{A}$ введена по чисто техническим соображениям. Концептуально $\mathcal{A}$ следует рассматривать аналогично случаю простого потребительского сектора как множество всех подмножеств множества A.

Спрос и распределение по предпочтениям – богатству. Легко проверяется (мы докажем более общий результат в утверждении 4), что средний спрос $\Phi(s, p)$ зависит исключительно от распределения предпочтений – богатства $\mu = \chi \circ s^{-1}$ при условии, что множества спроса $\varphi(s(a), p)$ являются выпуклыми. Точнее, мы установим, что

$$\Phi(s, p) = \int_{\mathcal{P} \times \mathbf{R}} \varphi(\cdot, p) d\mu,$$

где $\mu = \chi \circ s^{-1}$.

Следующий пример показывает, однако, что в общем случае, т.е. без предположения о выпуклых предпочтениях, ожидаемый спрос при заданном векторе цен p зависит от распределения предпочтений – богатства и от числа $|A|$ потребителей в множестве A (рис. 1.6).

Пример. Для любого $a \in A$ пусть $s(a) = (\mathbf{R}^2_+, \precsim, 1) \in \mathcal{P}^* \times \mathbf{R}$, где отношения $\precsim$ определяются кривыми безразличия, изображенными на схеме

Пусть $p = (1, 1)$. Мы покажем, в какой ситуации средний спрос определяется распределением предпочтений – богатства.

Утверждение 4. *Для любого потребительского сектора* s: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}$ *и любого вектора цен* $p > 0$:

(a) $\operatorname{conv} \Phi(s, p) = \operatorname{conv} \int_{\mathcal{P} \times \mathbf{R}} \varphi(\cdot, p) d\mu$, *где* $\mu = w \circ s^{-1}$;

(b) *если потребительский сектор s является выпуклым, то множество среднего спроса $\Phi(s, p)$ выпукло;*

(c) *если* $\inf p \cdot X_a \leqq w_a$, *почти везде на A, то множество ожидаемого спроса $\Phi(s, p)$ непусто и компактно.*

Доказательство. (a) Поскольку оба соответствия $\varphi(\cdot, p)$ и $\varphi(s(\cdot), p)$ имеют измеримый график [утверждение 2 и утверждение 1 (b) из D.II.3] и ограничены снизу, должно быть

$$\operatorname{conv} \int \varphi(s(\cdot), p)\, d\nu = \int \operatorname{conv} \varphi(s(\cdot), p)\, d\nu =$$

$$= \int \operatorname{conv} \varphi(\cdot, p)\, d\mu = \operatorname{conv} \int \varphi(\cdot, p)\, d\mu.$$

Действительно, первое и последнее равенства следуют из теоремы 4, D.II.4. Второе равенство следует из формулы преобразования теоремы 5, D.II.4. так как график соответствия $\operatorname{conv} \varphi(\cdot, p)$ принадлежит $\mathcal{B}_\mu(\mathcal{P} \times \mathbf{R}) \times \mathcal{B}^l$ [D.II.3, следствие из утверждения 3].

(b) Измеримое пространство $(A, \mathcal{A}, \nu)$ может быть разложено на счетное объединение атомов и неатомическую часть [D.I, (12)]. Поскольку для атомов предпочтения являются выпуклыми, множество спроса также выпукло. Поэтому по теореме 3 из D.II.4 мы получаем, что $\Phi(s, p)$ выпукло.

(c) Нам остается показать, что множество $S_\varphi(\cdot, p)d\mu$ непусто и компактно.

Поскольку $p > 0$ и $\inf pX \leqq w$ почти везде в $\mathcal{P} \times \mathbf{R}$ относительно распределения μ, множество спроса $\varphi(X, \succ, w, p)$ почти везде непусто [B.III, теорема 3]. Таким образом, в силу теоремы 2 и утверждения 7, D.II.4 интеграл $\int \varphi(\cdot, p)d\mu$ является непустым и компактным, если соответствие $\varphi(\cdot, p)$ интегрально ограничено. Чтобы показать это, можно предположить без потери общности, что φ принимает значения из $\mathbf{R}^l_+$. Рассмотрим функцию

$$h\colon\ \mathcal{P} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^l,$$

$$h(X, \succ, w) := \left(\frac{w}{p^1}, \ldots, \frac{w}{p^l}\right).$$

Ясно, что $\varphi(X, \succ, w, p) \leqslant h(X, \succ, w)$. Так как по предположению $\int w d\mu < \infty$, функция h является интегрируемой по мере μ. Утверждение доказано.

"Эффект выпуклости" спроса большого числа участников. Выпуклость множества среднего спроса $\Phi(s, p)$ потребительского сектора s для любой системы цен p оказывается решающим обстоятельством при доказательстве существования экономического равновесия [см. § 2.3 и 3.2].

Представляется правдоподобным, что множество ожидаемого спроса простого потребительского сектора, когда участников "много", является "почти" выпуклым. Это расплывчатое утверждение превращается в строгое ввиду следующего утверждения.

Утверждение 5. *Пусть s_n: $A_n \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}_+$ есть последовательность простых потребительских секторов для которых:*

(I) $|A_n| \to \infty$;

(II) *последовательность* (μ_n^w) *распределений богатства слабо сходится к распределению* μ^w *и последовательность* $(\int_{\mathbf{R}} \xi \, d\mu_n^w(\xi))$ *средних значений богатства сходится к среднему* $\int_{\mathbf{R}} \xi \, d\mu^w(\xi)$.

Тогда для любого $\epsilon > 0$ *и любого компактного множества* Π *строго положительных векторов цен существует такое целое* N, *что для каждого* $n \geqslant \mathbf{N}$ *и* $p \in \Pi$ *имеет место*

$$\operatorname{conv} \Phi(s_n, p) \subset B_\epsilon [\Phi(s_n, p)] .$$

Доказательство. Как легко проверить, достаточно показать, что для любой последовательности (p_n), $p_n \in \Pi$, и любого $y_n \in \operatorname{conv} \Phi(s_n, p_n)$ существуют такие векторы $z_n \in \Phi(s_n, p_n)$ и $d_n \in \mathbf{R}^l$ $(n = 1, \ldots)$, что

$$y_n = z_n + d_n \text{ и } d_n \to 0.$$

Поскольку $y_n \in \operatorname{conv} \Phi(s_n, p_n)$, мы имеем

$$|A_n| \cdot y_n \in \operatorname{conv} \sum_{A_n} \varphi(s_n(a), p_n).$$

Теперь на основании теоремы Шепли – Фолкмена (С. I, (6)) мы можем написать

$$|A_n| y_n = \sum_{A_n} f_n(a) + \sum_{F_n} (f'_n(a) - f_n(a)),$$

где $f_n := A_n \to \mathbf{R}^l$, причем $f_n(a) \in \varphi(s_n(a), p)$ для любого $a \in A_n$; f'_n: $F_n \to \mathbf{R}^l$, причем $f'_n(a) \in \operatorname{conv} \varphi(s_n(a), p_n)$ для любого $a \in F_n$; подмножество F_n множества A_n обладает свойством $|F_n| \leqq l$. Положим

$$d_n := \frac{1}{|A_n|} \sum_{F_n} (f'_n(a) - f_n(a)).$$

Пусть $\pi = \min \{ p^n \mid p \in \Pi, \ h = 1, \ldots, l \}$. Ясно, что $\pi > 0$. Поскольку $|f'_n(a) - f_n(a)| \leqq \frac{2}{\pi} \mathbf{w}(s_n(a))$, мы получаем

$$|d_n| \leqq \frac{2}{\pi} \frac{1}{|A_n|} \sum_{F_n} \mathbf{w} \circ s_n = \frac{2}{\pi} \int_{W_n} \xi \, d\mu_n^w(\xi),$$

где $W_n := \mathbf{w}(s_n(F_n))$. Так как $\mu_n^w(W_n) = |F_n| / |A_n| \to 0$ и по предположению (II) $\int \xi \, d\mu_n^w \to \int \xi \, d\mu^w$, из (D, I, (40)) следует, что $\int_{W_n} \xi \, d\mu_n^w(\xi) \to 0$, и поэтому $d_n \to 0$. Утверждение доказано.

Замкнутость отношения среднего спроса Φ. Мы указали условия, при которых средний спрос $\Phi(s, p)$ потребительского сектора s оказывается точно определенным. Исследуем теперь, как множество $\Phi(s, p)$ зависит от относящихся к экономике характеристик: распределения по предпочтениям – богатству $\mu = \nu \circ s^{-1}$ и вектора цен p.

Определение 6. Последовательность $[s_n: (A_n, \mathcal{A}_n, \nu_n) \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}]_{n=1,\ldots}$ потребительских секторов называется *сходящейся* к потребительскому сектору $[s: (A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}]$, если:

(I) последовательность (s_n) сходится к s по распределению, т.е. последовательность $\mu_n := \nu_n \circ s_n^{-1}$ распределений по предпочтениям – богатству слабо сходится к распределению по предпочтениям – богатству $\mu := \nu \circ s^{-1}$;

(II) $\int \mathbf{w} d\mu_n \to \int \mathbf{w} d\mu$, т.е. среднее значение богатства сходится.

Подчеркнем, что предел сектора потребления s входит здесь лишь под знаком среднего от его распределения по предпочтениям – богатству μ.

Примеры.

1. Пусть $(A_n, \mathcal{A}_n, \nu_n) = (A, \mathcal{A}, \nu)$ $(n = 1, \ldots)$, последовательность (s_n) сходится почти везде к s и

$\lim \int \mathbf{w} \circ s_n d\nu = \int \mathbf{w} \circ s d\nu$.

В этом случае легко показать, что $\mathrm{Ls}(\tilde{\Phi}(s_n, p_n)) \subset \tilde{\Phi}(s, p)$, как только $p_n \to p$ и $p > 0$.

2. Пусть распределения по предпочтениям – богатству μ_n и μ потребительских секторов s_n и s являются независимыми; $\mu_n = \mu_n^{\succ} \times \mu_n^{w}$, $\mu = \mu^{\succ} \times \mu^{w}$.

Последовательность s_n сходится к s, если $\mu_n^{\succ} \to \mu^{\succ}$, $\mu_n^{w} \to \mu^{w}$ и $\lim \int\limits_{\mathbf{R}} \xi d\mu_n = \int\limits_{\mathbf{R}} \xi d\mu^n$ (D. I, (25)).

3. Пусть $s: (A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}$ – потребительский сектор с распределением по предпочтениям – богатству μ. Рассмотрим независимую выборку объема n, извлеченную из распределения μ $(n = 1, 2 \ldots)$. Она определяет простой потребительский сектор s_n. Последовательность (s_n) "выборочных" потребительских секторов сходится к s с вероятностью единица. (D. I, (43)). Исследуя свойства непрерывности индивидуального спроса $\varphi(X, \succ, w, p)$, мы ввели (следствие 2 утверждения 3) понятие квазиспроса $\tilde{\varphi}(X, \succ, w, p)$. По тем же техническим соображениям мы используем это понятие при получении следующего результата.

Теорема 3. *Для любого потребительского сектора* s: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}$ *и вектора цен* $p > 0$, *где* $\inf p X'_a \leqq w_a$ *почти везде в* A, *средний квазиспрос* $\tilde{\Phi}(s, p) = \int \varphi(s(\cdot), p) d\mu$ *является выпуклым и компактным, а его выпуклая оболочка* $\mathrm{conv}\tilde{\Phi}(\cdot, \cdot)$ *замкнута в* (s, p). *Это значит, что для любой сходящейся к* s *последовательности* (s_n) *потребительских секторов и для любой сходящейся к* p *последовательности* (p_n) *векторов цен должно быть*

$\mathrm{Ls}(\mathrm{conv}\tilde{\Phi}(s_n, p_n)) \subset \mathrm{conv}\tilde{\Phi}(s, p)$.

Ясно, что если в дополнение потребительский сектор является выпуклым, то средний спрос $\Phi(\cdot, \cdot)$ замкнут в (s, p).

Доказательство. Как и в доказательстве утверждения 4(c), устанавливается, что множество $\tilde{\Phi}(s, p)$ непусто и компактно. Пусть последовательность (s_n) потребительских секторов сходится к s, а последовательность p_n векторов цен – к p. Каждый из потребительских секторов s_n может быть определен на своем пространстве с мерой $(A_n, \mathcal{A}, \nu_n)$; поэтому теорему 6, D. II, 4 применить непосредственно нельзя. Однако, используя теорему Скорохода (D. I, (37)), можно найти другую последовательность (v_n) потребительских секторов, определенных уже на одном и том же измеримом пространстве, и притом такую, что

$\tilde{\Phi}(v_n, p_n) = \mathrm{conv}\tilde{\Phi}(s_n, p_n)$, $n = 0, 1, \ldots$;

где $s_0 = s$ и $p_0 = p$.

Действительно, поскольку $\mu_n = \nu_n \circ s_n^{-1}$ слабо сходится к $\mu_0 = \nu \circ s^{-1}$, по теореме Скорохода (D. I, (37)) существует пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$, которое может быть выбрано неатомическим, и, кроме того, существуют измеримые отображения v_n из Ω в $\mathcal{P} \times \mathbf{R}$, для которых

$$\mu_n = \lambda \circ v_n^{-1}, \ n = 0, 1, \ldots, \quad v_n(w) \to v_0(w)$$

почти везде на Ω.

По теореме 3, D. II. 4 интеграл $\int \tilde{\varphi}(v_n(\cdot), p_n)\,d\lambda$ является выпуклым. Поэтому, как и в доказательстве утверждения 4(а), имеем

$$\int \tilde{\varphi}(v_n(\cdot), p_n)\,d\lambda = \operatorname{conv} \int \tilde{\varphi}(\cdot, p_n)\,d\mu_n,$$

$$\operatorname{conv} \int \tilde{\varphi}(s_n(\cdot), p_n)\,d\mu_n = \operatorname{conv} \int \tilde{\varphi}(\cdot, p_n)\,d\mu_n. \quad n = 0, 1, \ldots$$

Следовательно,

$$\tilde{\Phi}(v_n, p_n) = \operatorname{conv} \tilde{\Phi}(s_n, p_n), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

Пусть

$$\pi^h = \min\{p_n^h \mid n = 0, 1, \ldots\}, \quad 1 \leqq h \leqq l.$$

Так как $p_0 > 0$, мы можем предположить, что $\pi^h > 0$. Определим функцию $h\colon \mathcal{P} \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+^l$, положив

$$h(X, \succ, w) := (w/\pi^1, \ldots, w/\pi^l).$$

Ясно, что

$$\tilde{\varphi}(\cdot, p_n) \leqq h(\cdot), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

$$\int h\,d\mu_n \to \int h\,d\mu < \infty.$$

Поэтому

$$\tilde{\varphi}(v_n(w), p_n) \leqq h(v_n(w)),$$

$$h(v_n, (w)) \to h(v_0(w))$$

почти везде на Ω и

$$\int h \circ v_n\,d\lambda \to \int h \circ v\,d\lambda.$$

Теперь мы можем применить теорему 6, D.II, 4, которая дает

$$\operatorname{Ls}\left(\int \tilde{\varphi}(v_n(\cdot), p_n)\,d\lambda\right) \subset \int \operatorname{Ls}(\tilde{\varphi}(v_n(\cdot), p_n)\,d\lambda). \tag{3}$$

Поскольку $v_n(w) \to v(w)$ почти везде на Ω, из следствия 2 к утверждению 3 получаем

$$\operatorname{Ls}(\tilde{\varphi}(v_n(w), p_n)) \subset \tilde{\varphi}(v(w), p) \tag{4}$$

почти всюду на Ω. Поэтому в силу (1), (3), (4) будем иметь

$$\operatorname{Ls}(\operatorname{conv} \tilde{\Phi}(s_n, p_n)) \subset \int \tilde{\varphi}(v(\cdot), p)\,d\lambda = \operatorname{conv} \tilde{\Phi}(s, p),$$

что и требовалось.•

В следствии 1 к утверждению 3 было показано, что в случае монотонных предпочтений спрос стремится к бесконечности, если какие-то цены стремятся к нулю, а богатство остается положительным. Распространим теперь это утверждение на средний спрос потребительского сектора.

Утверждение 6. *Пусть последовательность* (s_n) *потребительских секторов сходится так, что предельное распределение* $\mu := \lim \mu_n$ *сосредоточено на множестве* $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_+$ *и* $\int \mathrm{w} d\mu > 0$. *Пусть последовательность* (p_n) *строго положительных векторов цен сходится к вектору цен* p, *который не является строго положительным. Тогда*

$$\inf \{|x| \mid x \in \Phi(s_n, p_n)\} \underset{n}{\to} \infty.$$

Доказательство. Применим теорему Скорохода (D.I, (37)) к последовательности $\mu_n \to \mu_0 := \mu$. На ее основании существуют такое неатомическое пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$ и такие измеримые отображения $v_n\colon \Omega \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, что $v_n \to v_0$ почти везде относительно λ, $\mu_n = \lambda \circ v_n^{-1}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. График соответствия $\varphi(v_n(\cdot), p_n$ из Ω в $\mathbf{R}^l$ является измеримым (утверждение 2 и D.II, 3, утверждение 1 (b)). Следовательно (D.II.3, утверждение 3), функция $g_n = \operatorname{dist}[0, \varphi(v_n(\cdot), p_n)]$ из Ω в $\mathbf{R}$ является измеримой и потому интегрируемой.

Таким образом, по лемме Фату (D.I, (19)) мы получаем

$$\int \liminf_n g_n d\lambda \leq \liminf_n \int g_n d\lambda.$$

Если $\operatorname{dist}[0, M]$, $M \subset \mathbf{R}^l$ определено в терминах нормы

$$|x| = \sum_{h=1}^{l} |x^h|,$$

то (D.II.4, утверждение 6)

$$\operatorname{dist}[0, \Phi(v_n, p_n)] = \int \operatorname{dist}[0, \varphi(v_n(\cdot), p_n)]\, d\lambda.$$

Таким образом, из (1) следует, что

$$\int \liminf_n g_n d\lambda \leqq \liminf_n \operatorname{dist}[0, \Phi(v_n, p_n)].$$

Далее из $\int \mathrm{w} d\mu > 0$ следует, что

$$\lambda\{\omega \in \Omega \mid \mathrm{w}(v_0(\omega)) > 0\} > 0.$$

Но для любого $\omega \in \Omega$, для которого $\mathrm{w}(v_0(\omega)) > 0$, из следствия 1 к утверждению 3 вытекает, что $g_n(\omega) \to \infty$. Следовательно, из (2) получаем

$$\operatorname{dist}[0, \Phi(v_n, p_n)] \to \infty.$$

Утверждение 4 дает

$$\Phi(v_n, p_n) = \operatorname{conv} \Phi(\mu_n, p_n) = \operatorname{conv} \Phi(s_n, p_n),$$

откуда вытекает доказываемое свойство.

Задачи

Задача 1 (средний спрос потребительского сектора, преобразованного в выпуклый). Пусть $\precsim \to \dot{\precsim}$ есть отображение из $\mathcal{P}^*_{\mathrm{mo}}$ в $\mathcal{P}^*_{\mathrm{mo, co}}$, определенное в задаче 7.1.1.

Установить следующий результат. Пусть s: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}^*_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}$ есть неатомический потребительский сектор. Тогда отображение $\dot{s}$: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}^*_{\substack{\mathrm{mo}\\ \mathrm{co}}} \times \mathbf{R}$, определяемое как $\dot{s}(a) := (\dot{\succsim}_{s(a)}, w_{s(a)})$, является потребительским сектором и для любого вектора цен $p \in \mathbf{R}^l$ выполняется равенство

$$\Phi(s, p) = \Phi(\dot{s}, p).$$

Задача 2. Установить следующий результат. Пусть s: $(A, \mathcal{A}, w) \to \mathcal{P}_{\mathrm{wmo}} \times \mathbf{R}_+$ есть выпуклый потребительский сектор.

Тогда для любого вектора цен $p \in \mathbf{R}^l$

$$\Phi(s, p) = \operatorname{conv} \int \varphi(\cdot, p) d\mu,$$

где $\mu = \nu \circ s^{-1}$ и множество $\Phi(s, p)$ является замкнутым и выпуклым.

Указание. Показать, что множество $\operatorname{conv} \varphi(X, \succ, w, p)$ замкнуто, а затем применить теорему 5, D.II.4.

Задача 3. Установить следующий результат.

Пусть μ_n $(n = 0, 1, \ldots)$ – распределение по предпочтениям – богатству на $\mathcal{P} \times \mathbf{R}$, а p_n $(n = 0, 1, \ldots)$ –векторы цен из $\mathbf{R}^l$.

Предположим, что:

(α) последовательность (μ_n) слабо сходится к μ_0;

(β) существует такая непрерывная функция h: $\mathcal{P} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^l$, что

$$\int h d\mu_n \to \int h d\mu < \infty \quad \text{и} \quad \tilde{\varphi}(\cdot, p_n) \leqq h, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Если $z_n \in \operatorname{conv} \int \tilde{\varphi}(\cdot, p_n) d\mu_n$ и $(z_n, p_n) \to (z, p)$, то $z \in \operatorname{conv} \int \tilde{\varphi}(\cdot, p) d\mu$.

Задача 4 (полунепрерывность снизу отображения $\varphi(\cdot, p)$ для больших "типовых потребительских секторов"). Установить следующий результат.

Пусть последовательность потребительских секторов s_n: $(A_n, \mathcal{A}_n, \nu_n) \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}$ сходится к потребительскому сектору s: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}$, причем $|A_n| \to \infty$, и $\operatorname{supp}(\mu_n) = \operatorname{supp}(\mu)$ $(n = 1, \ldots)$.

Тогда для любого вектора цен $p > 0$ и любого $x \in \Phi(s, p)$ существует последовательность $x_n \to x$ с элементами $x_n \in \Phi(s_n, p)$. Останется ли это заключение справедливым, если фиксированный вектор цен p заменить на последовательность $p_n \to p > 0$?

Указание. Использовать теорему Скорохода (D.I, (30)) и задачу 6, D.II.4.

Задача 5 (полунепрерывность снизу среднего ϵ-спроса). Установить следующий результат.

Пусть s_n: $(A_n, \mathcal{A}_n, \nu_n) \to \mathcal{P}^*_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_+$ есть последовательность потребительских секторов, сходящаяся к потребительскому сектору s: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}^*_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_+$.

Предположим, что либо все s_n являются выпуклыми, либо все s_n простые и $|A_n| \to \infty$. Пусть $x \in \Phi(s, p)$, $p > 0$ и $p_n \to p$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется такая последовательность (x_n):

$$x_n \in \Phi^\epsilon(s_n, p_n) := \int \varphi^\epsilon(s_n(\cdot), p_n) d\nu_n,$$

что $x_n \to x$. (Множество ϵ-спроса $\varphi^\epsilon(X, \succ, w, p)$, как оно было определено в задачах 11, 12.)

Примечания к § 1.3

Если пространство с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$, элементами которого являются потребители, фиксировано, то полунепрерывность сверху среднего спроса (теорема 3) известна: если пространство с мерой является простым, то полунепрерывность сверху совокупного спроса следует непосредственно из того же свойства индивидуального спроса; для общего пространства с мерой полунепрерывность сверху среднего спроса Φ вытекает из результата (D.II.4, теорема 6), полученного Ауманном (1965). Шмайдлер (1969) доказал полунепрерывность Φ сверху для случая, когда предпочтения не предполагаются полными.

"Эффект выпуклости" (утверждение 5) среднего спроса большого числа участников неформально обсуждался Фарреллом (1959). См. также работы Ротенберга (1960), Батора (1961), Купманса (1961) и Фаррелла (1961).

Первое строгое изложение этой проблемы, показавшее важность теоремы Шелли – Фолкмана, принадлежит Старру (1969); см. также книгу Эрроу и Хана (1971).

ГЛАВА 2
ОБМЕН

§ 2.1. *c*-ядро и равновесие по Вальрасу

Введение. В этой главе мы изучим простую форму экономической деятельности – обмен товаров. Будем рассматривать множество индивидуумов, каждый из которых описывается своим множеством потребления, отношением предпочтений и первоначальными ресурсами, т.е. элементом пространства характеристик участников $\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$.

Экономика обмена в этом случае определяется заданием отображения конечного множества A (множества участников экономики) в пространстве $\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$ (характеристик участников). По соображениям, которые станут ясными далее, мы будем рассматривать также и бесконечные множества участников A. Разумеется, в этом случае "совокупный первоначальный ресурс" оказывается бесконечно большим. Чтобы преодолеть возникающие при этом трудности, мы заменим понятие "совокупность первоначального ресурса" на понятие "среднее первоначального ресурса".

Результатом любого обмена является перераспределение первоначального ресурса. Экономический анализ обмена, как он здесь представлен, заключается в конкретизации некоторого класса перераспределений как возможных результатов обмена. Фактический процесс, в результате которого осуществляется перераспределение, в явном виде не рассматривается. Будут анализироваться две концепции равновесия: кооперативная концепция – *c-ядро*, и некооперативная – *равновесие по Вальрасу*.

Сначала рассмотрим кооперативную концепцию, в соответствии с которой *c*-ядро экономики обмена состоит из тех перераспределений совокупного первоначального ресурса, каждое из которых ни одна из групп не в состоянии "улучшить". Под этим понимается следующее. Группа участников может *улучшить перераспределение*, если эта группа, используя находящиеся в ее распоряжении первоначальные ресурсы, может сделать каждого своего члена богаче независимо от действий участников, не входящих в эту группу.

Обратимся теперь к некооперативной концепции – равновесию по Вальрасу. Это равновесие состоит из таких перераспределений совокупных первоначальных ресурсов и вектора цен, что ни один индивидуальный участник, действуя самостоятельно, не сможет в условиях этих цен улучшить свое положение. Когда говорят о действии некоторого вектора цен, имеют в виду, что каждый участник рассматривает этот вектор цен как заданный (выходящий за пределы его влияния) и что существует "рынок", на котором участники экономики могут продавать и покупать любые количества любого товара по этим ценам.

Будет показано, что любое равновесие по Вальрасу принадлежит c-ядру (утверждение 1). Для того чтобы исследовать обратное включение, необходимо придать точное значение традиционному экономическому понятию "чистая конкуренция", т.е. экономике, в которой влияние каждого индивидуального участника пренебрежимо мало. Другими словами, речь идет о множестве участников, каждый из которых не может повлиять на результат коллективной деятельности, но некоторые их коалиции могут влиять на этот результат. Логически это приводит к "неатомической" экономике, называемой также экономикой с "континуумом участников".

Существенным результатом этого параграфа (теорема 1) является совпадение c-ядра и множества равновесных по Вальрасу распределений для такой "неатомической" экономики.

Для лучшего понимания идеи неатомической экономики покажем, что эту экономику можно рассматривать как "предел" последовательности конечных экономик (утверждение 2). Тот факт, что неатомическую экономику можно рассматривать как предел, играет важную роль на протяжении этой книги.

Экономики обмена. При изучении чистого обмена каждый участник экономики понимается как точка в пространстве характеристик агентов $\mathscr{P} \times \mathbf{R}^l$. Чтобы упростить изложение, в этой главе будем часто предполагать, что потребительское множество X совпадает с положительным ортантом $\mathbf{R}^l_+$ и что вектор первоначальных ресурсов $e \geqq 0$.

Сформулируем теперь общее определение экономики обмена. Его обоснование и интерпретация приводятся ниже.

Определение 1. *Экономикой обмена* $\mathscr{E}$ называется такое измеримое отображение пространства с мерой $(A, \mathscr{A}, \nu)$ в пространство характеристик участников $\mathscr{P} \times \mathbf{R}^l$, что средний первоначальный ресурс $\int \mathrm{e} \circ \mathscr{E} \, d\nu$ является конечным*).

Дележом для экономики обмена $\mathscr{E}$ называется такая интегрируемая функция f из A в $\mathbf{R}^l$, что почти всюду в A вектор потребления $f(a)$ принадлежит потребительскому множеству участника a.

---

*) e обозначает исходный вектор первоначальных ресурсов, а e – проекцию $\mathscr{P} \times \mathbf{R}^l$ на $\mathbf{R}^l$.

Дележ f для $\mathcal{E}$ называется *достижимым* или *состоянием экономики* $\mathcal{E}$, если

$$\int f d\nu = \int \mathbf{e} \circ \mathcal{E} d\nu.$$

Экономика обмена называется:

простой, если пространство с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$ является простым, т.е. A – конечное множество, $\mathcal{A}$ – множество всех подмножеств множества A и $\nu(E) = |E|/|A|$, $E \subset A$*);

неатомической, если пространство с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$ является неатомическим, т.е. для каждого $E \in \mathcal{A}$ такого что $\nu(E) > 0$, существует $S \subset E$ такое, что

$$S \in \mathcal{A}, \quad 0 < \nu(S) < \nu(E);$$

выпуклой, если почти все участники каждого атома пространства с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$ имеют выпуклые предпочтения.

Обозначения. Набор, состоящий из потребительского множества, отношения предпочтения и первоначального ресурса участника a из A, обозначается $\mathcal{E}(a) = (X(\mathcal{E}(a)), \succ_{\mathcal{E}(a)}, \mathbf{e}(\mathcal{E}(a)))$. Если ясно, какое именно отображение $\mathcal{E}$ рассматривается, то будем сокращенно писать $(X(a), \succ_a, e(a))$ или даже просто $(X_a, \succ_a, e_a)$. Подмножества множества A, принадлежащие $\mathcal{A}$, называются также *коалициями*. Распределение на $\mathcal{E}$, т.е. мера $\nu \circ \mathcal{E}^{-1}$ на $\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$, называется *распределением по предпочтениям – расурсам* экономики $\mathcal{E}$ – и обозначается $\mu_{\mathcal{E}}$ или просто μ.

Значение и интерпретация понятий "простая экономика обмена" и "дележ для простой экономики" очевидны и не нуждаются в пояснениях. Если f есть дележ для простой экономики $\mathcal{E}$, то $f(a)$ – вектор товаров, предназначенный участнику a, а интеграл $\int e d\nu = (1/|A|) \sum_{a \in A} e_a$ – средний первоначальный ресурс экономики $\mathcal{E}$. Особо подчеркнем, что $\int_E f d\nu$ не означает вектора товаров, предназначенного для коалиции E, поскольку если $\mathcal{E}$ – простая экономика, то $\int_E f d\nu = (1/|A|) \sum_E f$.

Понятие "неатомическая экономика обмена" фактически является совершенно абстрактным. Интерпретация в данном случае опирается на аналогию с простой экономикой. Ключ к строгой интерпретации дает утверждение 2 в конце этого параграфа. Как и в случае простой экономики, $f(a)$ означает вектор товаров, предназначенный участнику a. Число $\nu(E)$ интерпретируется как доля участников, принадлежащих коалиции E, от общего их числа. Интеграл $\int e d\nu$ представляет собой средний первоначальный ресурс экономики $\mathcal{E}$; σ-алгебра $\mathcal{A}$ коалиций вводится по чисто техническим (связанным с теорией меры) соображениям. Как и в случае простой экономики, априорные ограничения на возможные коалиции не накладываются. Поскольку в неатомическом пространстве с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$ множество A должно быть бесконечным и притом несчетным, мы будем говорить о континууме участников экономики. Результаты этой главы полностью оправдывают рассмотрение неатомической экономики обмена в качестве адекватной математической модели традицион-

*) В этом случае мы для краткости пишем $\mathcal{E}: A \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$.

ного экономического понятия "чистая конкуренция". Иными словами, это – множество участников экономики, каждый из которых не в состоянии повлиять на результат коллективных действий; некоторые коалиции могут оказать влияние на этот результат. Последнее из понятий, фактически так же абстрактно, как и первое, которое, однако, имеет решающее преимущество строгого математического определения.

"Выпуклая экономика" была определена для удобства ссылок на неатомическую, или простую, экономику с выпуклыми предпочтениями. С формальной точки зрения можно также рассматривать пространство с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$, состоящее из атомов и неатомической части. В терминах ранее изложенной интерпретации атом можно рассматривать как "торговый синдикат", т.е. неделимую группу участников: либо все ее члены вступают в коалицию, либо ни один из них. Заметим, однако, что отображение $\mathcal{E}$, как и любой дележ f, должно быть на атоме уравнительным. Это означает, что все составляющие атом участники должны иметь одинаковые характеристики и получать одинаковый набор товаров при дележе – случай настолько специфический, что интерпретация атомов как синдикатов не имеет бо́льшого экономического значения. Альтернативный подход состоит в том, что атом рассматривается как "большой" участник. В рамках рассматриваемой модели эпитет "большой" может означать лишь "большую" величину первоначального ресурса. Таким образом, атомом являлся бы участник, первоначальный ресурс которого был бы бесконечно больше первоначального запаса любого участника из неатомической части экономики. В этом случае мера $\nu(S)$ приобретает другую интерпретацию. Первоначально она выражала относительное число участников в коалиции S, теперь же она выражает нечто подобное относительной величине первоначального ресурса коалиции S. Кроме того, новую интерпретацию должны получить также дележ $f(a)$ и предпочтение $\succ_a$. Окончательный результат далеко не очевиден.

Не вызывает сомнений, что достаточно последовательная интерпретация модели с "большими" и "малыми" торговцами возможна. Однако в модели чистого обмена, в которой производства нет, все товары должны быть потреблены, а накопление отсутствует, экономическое содержание такой интерпретации проглядывается с трудом. Поэтому мы воздержимся от дальнейшего рассмотрения этой проблемы.

c-ядро. Очевидно, что экономика не находится в равновесном состоянии, если некоторый ее участник или какая-то их группа могли бы осуществить в сложившихся обстоятельствах решение и достичь положения, более выгодного для всех членов этой группы, чем имеющееся состояние. Лежащее здесь в основе понятие равновесия опирается на поведенческое предположение о том, что участники экономики стремятся улучшать свое положение и что для достижения более предпочтительной ситуации они склонны к объединению. Такое понимание равновесия приводит к фундаментальной концепции c-ядра экономики. В экономике обмена коалиция участников может улучшить перераспределение ресурса, если эта коалиция, используя собственные первоначальные ресурсы, может сделать каждого своего члена богаче. Ядро экономики обмена определяется как множество всех перераспределений, которые не может улучшить ни одна коалиция. Формально это выражается в следующем определении.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть f – дележ для экономики $\mathcal{E}: (A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$.

Коалиция $S \in \mathcal{A}$ может *улучшить* дележ f, если существует такой дележ g для $\mathcal{E}$, что:

(I) $g(a) \succ_a f_a$ почти везде в S;

(II) $\nu(S) > 0$ и $\int\limits_S g d\nu = \int\limits_S e d\nu$.

Множество всех достижимых дележей для экономики $\mathcal{E}$, которые не может улучшить ни одна коалиция из $\mathcal{A}$, называется *с-ядром* экономики и обозначается С($\mathcal{E}$).

Смысл понятий "улучшение" и "с-ядро" для простых экономик очевиден. В рамках развиваемого здесь подхода исключаются любые побочные воздействия в потреблении (т.е. предпочтения не зависят от потребления других потребителей); уровень полезности членов любой коалиции не зависит от действий, предпринимаемых участниками, не входящими в эту коалицию. *с*-ядро несет информацию о том, что коалиции способны или не способны сделать для себя, а не то, что они способны или не способны сделать для своих конкурентов. Поэтому мы, в частности, пользуемся термином "улучшение", а не "блокировка", который также использовался в литературе, но был отвергнут как противоречащий интуиции и приводящий к дезориентации*).

Ни одной группе участников априори не запрещается сформироваться в коалицию. Действительно, в соответствии с нашим определением простой экономики множество коалиций должно совпадать с семейством всех подмножеств множества участников. Если экономика не является простой, то σ-алгебра $\mathcal{A}$, как уже говорилось, вводится по чисто техническим соображениям. Концептуально $\mathcal{A}$ следует рассматривать как множество всех подмножеств.

Очевидно, в определении *с*-ядра можно было бы потребовать принадлежности коалиций некоторому априори заданному подклассу $\mathcal{C}$, содержащемуся в $\mathcal{A}$. Атомы пространства с мерой $(A, \mathcal{C}, \nu)$ в этом случае имели бы очевидную интерпретацию. Однако общие и экономически содержательные результаты получены к настоящему времени только для экстремальных вариантов задания $\mathcal{C}$ как семейства всех непустых подмножеств (*с*-ядро) и как единственной коалиции, совпадающей с множеством всех участников (эффективные по Парето состояния)**).

Ограничиваясь рассмотрением дележей из *с*-ядра, мы тем самым неявно предполагаем, что необходимая для образования коалиций информация в принципе может быть получена и что эти "информация и связь" являются бесплатными. Очевидно, такое предположение довольно далеко от действительности. Но разве может быть премлемой теория, допускающая в качестве возможных результатов такие состояния экономики, которые, если информация станет доступной, окажутся нереализуемыми?

---

*) См. Шепли (1972b).

**) Некоторые результаты известны и для неатомической экономики: см. задачи 2 и 3.

До тех пор, пока "связь и информация" не введены в экономический анализ явным образом, мы не видим способа, как можно было бы учесть связанные с ними ограничения.

Равновесие по Вальрасу. Теперь мы введем существенно иное понятие "равновесие". Предположим, что каждый товар h имеет цену p^h (т.е. что p^h/p^k является количеством товара k, которое обменивается на единицу товара h). Предположим далее, что каждый участник экономики принимает эти цены как заданные. Тогда участник a с характеристиками $(X_a, \succ_a, e_a)$ рассматривает только те векторы товаров, которые принадлежат его бюджетному множеству $\{x \in X_a \mid px \leqq pe_a\}$, и выбирает из этого множества наиболее желательный вектор. Если все принятые таким образом индивидуальные решения – децентрализованно посредством системы цен p – порождают ситуацию, когда совокупный спрос равен совокупному предложению, то состояние экономики называется *равновесием по Вальрасу*. Эта концепция равновесия основывается на поведенческом предположении о том, что участники экономики рассматривают эту систему цен как заданную и принимают свои решения независимо друг от друга. Единственной связью между индивидуальными решениями является система цен. Формально это выражается следующим определением.

Определение 3. Дележ f для экономики $\mathcal{E}$ и вектор цен $p \in \mathbf{R}^l$ называются *равновесием по Вальрасу* для $\mathcal{E}$, если:

(I) $f(a) \in \varphi(X_a, \succ_a, p \cdot e_a; p)$

почти везде в A, т.е. $f(a)$ является максимальным элементом для отношения $\succ_a$ в бюджетном множестве $\{x \in X_a \mid px \leqslant pe_a\}$;

(II) $\int f d\nu = \int e d\nu$, т.е. средний спрос равен среднему предложению.

Дележ f для экономики $\mathcal{E}$ называется *дележом Вальраса*, если существует такой вектор цен $p \in \mathbf{R}^l$, что (f, p) является равновесием по Вальрасу.

Множество всех дележей Вальраса для экономики $\mathcal{E}$ обозначается $W(\mathcal{E})$.

Вектор цен $p \in \mathbf{R}^l$ называется *вектором равновесных цен* для экономики $\mathcal{E}$, если существует такой дележ f для $\mathcal{E}$, что (f, p) является равновесием по Вальрасу.

Множество всех нормированных систем цен равновесия (т.е. таких, для которых $|p| = 1$) для экономики $\mathcal{E}$ обозначается $\Pi(\mathcal{E})$.

Пример (ящик Эджворта). Рис. 2.1, на котором изображен "ящик Эджворта", показывает достижимые дележи для случая двух товаров и двух участников. Потребительское множество каждого участника представляет собой положительный ортант. Вектор совокупных первоначальных ресурсов здесь $(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{e}$, $e > 0$. Поэтому, очевидно, любая точка (x, y) из "ящика", т.е. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (0, 0) \leqq (x, y) \leqq (\bar{x}, \bar{y})\}$, может быть интерпретирована как распределение совокупного первоначального ресурса; действительно, первый участник получает (x, y), а второй $(\bar{x} - x, \bar{y} - y)$. Если отношения предпочтений обоих участников принадлежат $\mathcal{P}^*$, то можно вычертить соответствующие им кривые безразличия. Сплош-

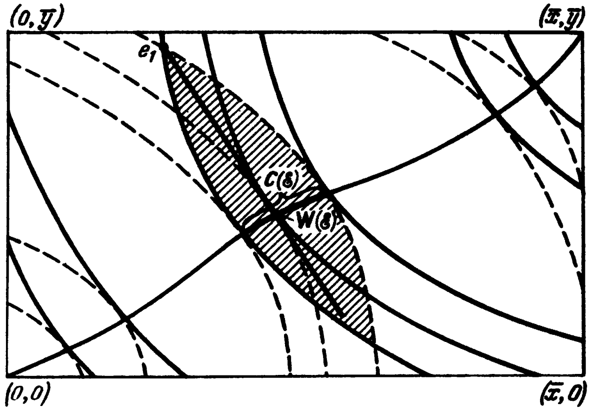

Рис. 2.1

ные кривые относятся к безразличиям первого участника, а штриховые — второго, причем начало системы координат находится в правом верхнем углу $(\bar{x}, \bar{y})$ ящика, т.е. две точки z_1 и z_2 на одной и той же штриховой линии обладают тем свойством, что векторы $(\bar{e} - z_1)$ и $(\bar{e} - z_2)$ рассматриваются вторым участником как безразличные.

Рассмотрим приведенное на рис. 2.1 распределение первоначальных ресурсов, при котором первый участник имеет e_1, а второй $(\bar{e} - e_1) = e_2$. Ясно, что первый участник может улучшить любую точку из ящика, расположенную ниже его кривой безразличия, проходящей через e_1, и что второй участник может улучшить любую точку, которая лежит выше (в ящике) его (штриховой) кривой безразличия, проходящей через e_1. Таким образом, мы получаем "заштрихованную линзу". Очевидно, в этой заштрихованной линзе существуют точки, которые могут улучшить оба участника, если будут действовать сообща.

Рассмотрим произвольную точку z на рис. 2.1. Коалиция из двух участников не может улучшить точку z, если множество точек, расположенных выше кривой безразличия первого участника, проходящей через z, и множество точек, расположенных ниже кривой безразличия второго участника, проходящей через z, не пересекаются. Геометрическое место точек, обладающих этим свойством (называемых *эффективными распределениями по Парето*), образует на рис. 2.1 линию, идущую из (0, 0) в $(\bar{x}, \bar{y})$.

Таким образом, c-ядро представляет собой пересечение этой линии с заштрихованной линзой.

Наконец, равновесием по Вальрасу является такая точка z ящика, что прямая, проходящая через e_1 и z, отделяет множество точек, расположенных выше кривой безразличия первого участника, проходящей через z, от множества точек, расположенных ниже кривой безразличия второго участника, проходящей через z.

Ящики Эджворта, изображенные на рис. 2.2 и 2.3, показывают, что точек равновесия по Вальрасу может быть бесконечно много, а может и не быть вовсе.

При каких условиях оправдывается поведенческое предположение о том, что участники экономики приспосабливаются к действующей систе-

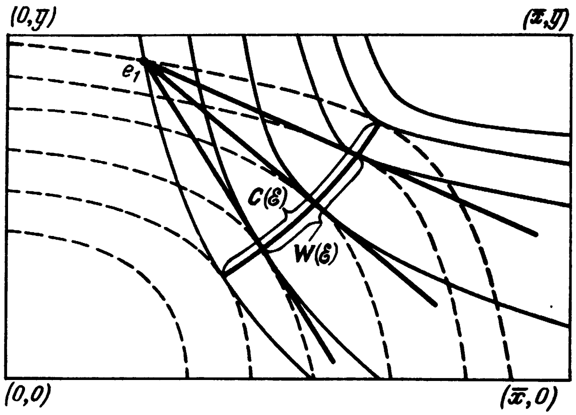

Рис. 2.2

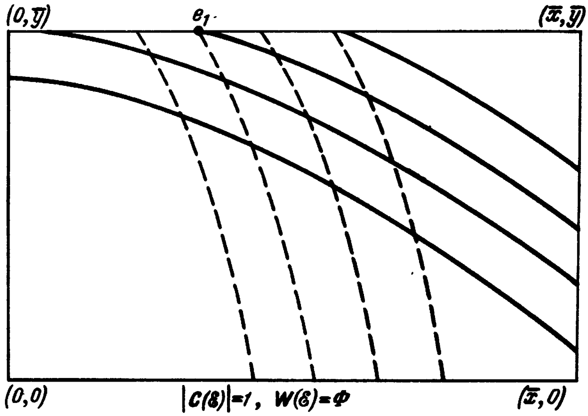

Рис. 2.3

ме цен? Очевиден следующий ответ: если участники не в состоянии повлиять на цены, то они воспринимают их как заданные. Это приводит к рассмотрению неатомической экономики. В этом случае правомерно спросить, какие черты выделяют вальрасовский дележ среди всех тех дележей, которые не могут быть улучшены. Мы покажем, что таких черт нет. Любой дележ, не являющийся вальрасовским, может быть улучшен. Иными словами, вальрасовские дележи, и только они, принадлежат c-ядру, т.е. W(&) = C(&). Одно из включений, составляющих это равенство, тривиально.

Утверждение 1. *Для любой экономики обмена* &

W(&) ⊂ C(&).

Доказательство. Пусть $f \in$ W(&), но $f \notin$ C(&). Тогда существуют такие коалиции $S \in \mathcal{A}$, $\nu(S) > 0$ и дележ g, что

(I) $g(a) >_a f(a)$ почти везде в S;

(II) $\int_S g d\nu = \int_S e d\nu$.

Из (I) и определения вальрасовского дележа получаем $p \cdot e(a) < < p \cdot g(a)$ почти всюду в S, где p обозначает равновесный вектор p, соответствующий f. Поэтому $p \int\limits_S e dv < p \int\limits_S g dv$, что противоречит (II), и утверждение доказано.

Очевидно, что в случае малой экономики участники экономики не имеют причин рассматривать цены как заданные, поскольку своими действиями они могут на них влиять. Именно поэтому Эджворт ввел в 1881 г. понятие "*кривая контрактов*" (которая в случае двух участников и двух товаров совпадает с *c*-ядром) с целью описания возможных распределений в экономической ситуации, когда число участников не гарантирует выполнения предположения о приспособлении к ценам. Однако если влияние любого отдельного участника в экономике & пренебрежимо мало,

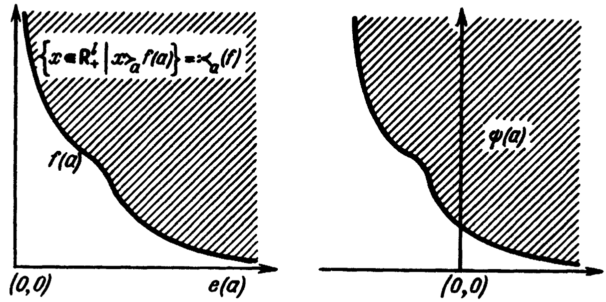

Рис. 2.4

то можно ожидать, что любой дележ, отличающийся от равновесного, может быть улучшен.

Эта ситуация оказывается особенно простой для неатомической экономики.

Т е о р е м а 1. *Пусть* &: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}_{mo} \times \mathbf{R}^l_+$ – *неатомическая экономика, для которой* $\int e d\nu > 0$. *Тогда*

$$W(\&) = C(\&).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о*). Мы должны показать, что из $f \in C(\&)$ следует $f \in W(\&)$. Рассмотрим (рис. 2.4) для каждого участника $a \in A$ множества

$$\prec_a(f) := \{x \in X(a) \mid x \succ_a f(a)\},$$

$$\psi(a) := \{\prec_a(f) - e(a)\} \cup \{0\}.$$

Поскольку пространство с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$ является неатомическим, из теоремы 3, D.II.4 следует, что интеграл $\int \psi d\nu$ является выпуклым подмножеством в $\mathbf{R}^l$. Очевидно, $\int \chi d\nu \neq \phi$, так как $0 \in \int \psi d\nu$. Мы утверждаем теперь, что $\int \psi d\nu \cap \mathbf{R}^l_- = \{0\}$. Предположим, что, напротив, существует интегрируемая функция $h \in \mathcal{L}_\psi$, для которой $\int h d\nu < 0$. Тогда

*) Доказательство, не использующее понятие "интеграл от соответствия", см. в задаче 9.

коалиция $S = \{ a \in A \mid h(a) \neq 0 \}$ может улучшить дележ f, заменив его дележом g:

$$g(a) = h(a) + e(a) - \frac{\int h d\nu}{\nu(S)} \cdot$$

Действительно, $\nu(S) > 0$, $g(a) \succ_a f(a)$ для любого $a \in S$ и $\int\limits_S g d\nu = \int\limits_S e d\nu$.

Следовательно, (C.II, (11)) существует гиперплоскость, разделяющая выпуклые множества $\int \psi d\nu$ и $\mathbf{R}^l$, т.е. существует такой вектор $p \in \mathbf{R}^l$, $p \geqq 0$, что

$$0 \leqq pz \text{ для любого } z \in \int \psi d\nu. \tag{1}$$

График соответствия ψ измерим. В самом деле, множество

$$G := \{ (X, \succ, x, y) \in \mathcal{P}_{\text{mo}} \times \mathbf{R}^l_+ \times \mathbf{R}^l_+ \mid x \succ y \}$$

является борелевским в $\mathcal{P}_{\text{mo}} \times \mathbf{R}^l_+ \times \mathbf{R}^l_+$ (§ 1.2, следствие 2, теоремы 1 и D.I, (1)). График соответствия $a \mapsto \psi(a) \setminus \{0\}$, т.е. множество

$$\{ (a, x) \in A \times \mathbf{R}^l \mid x + e(a) \succ_a f(a) \},$$

совпадает с $h^{-1}(G)$, где h – отображение из $A \times \mathbf{R}^l$ в $A \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l$, определенное как

$$h(a, x) := (X_a, \succ_a, x + e(a), f(a)).$$

Ясно, что отображение h измеримо (D.I, (5)), и, следовательно, график соответствия ψ является измеримым.

Отсюда следует (D.II.4, утверждение 6), что

$$\inf_{z \in \int \psi d\nu} pz = \int \inf_{x \in \psi(\cdot)} px d\nu.$$

Следовательно, из (1) получаем

$$0 \leqq \int \inf p \chi d\nu.$$

Поскольку по определению множество $\psi(a)$ содержит 0, очевидно, что $\inf p\psi(a) \leqq 0$. Из этого следует, что почти везде в A должно быть $\inf p\psi(a) = 0$. Таким образом, мы показали, что

$$\text{почти везде в } A \quad pe(a) \leqq px \text{ для любого } x \succ_a f(a). \tag{2}$$

Из (2) следует, что почти везде в A имеет место $p \cdot e(a) = p \cdot f(a)$. Действительно, сначала из (2) можно получить, что $p \cdot e(a) \leqq p \cdot f(a)$ почти везде в A. Далее, если $pe(a) < pf(a)$ для имеющего положительную меру множества участников, то получим неравенство

$$p \int e d\nu < p \int f d\nu,$$

которое противоречит тому, что $\int e d\nu = \int f d\nu$. Поскольку по предположению $\int e d\nu > 0$ и $p \geqslant 0$, обязательно должно быть

$$\nu \{ a \in A \mid pe(a) > 0 \} > 0.$$

Но для любого участника a с положительным доходом, т.е. для которогс $pe(a) > 0$, свойство (2) дает, что $f(a) \in (\varphi \succ_a, p \cdot e_a(a), p)$. Действительно, если $x \in \mathbf{R}^l_+$, $px < pe(a)$, то из (2) следует, что $x \not\succ_a f(a)$. В случае, когда $pe(a) > 0$, любой набор $x \in \mathbf{R}^l_+$, для которого $px = pe(a)$, является пределом такой последовательности (x_n), что $px_n < p \cdot e(a)$. Поэтому непрерывность отношения предпочтения $\succ_a$ дает $x \not\succ_a f(a)$. Таким образом, $f(a)$ является максимальным элементом в смысле отношения $\succ_a$ в бюджетном множестве $\{x \in \mathbf{R}^l_+ \mid px \leqq pe(a)\}$. Вместе с монотонностью предпочтений это приводит к неравенству $p > 0$. Поэтому $f(a)$ принадлежит множеству спроса $\varphi(\succ_a, pe(a), p)$ даже в случае $pe(a) = 0$, так как по свойству (2) вектор $f(a)$ принадлежит бюджетному множеству, равному в этом случае $\{0\}$. Это и доказывает, что (f, p) является равновесием по Вальрасу.

Чисто конкурентные последовательности экономики. Мы уже отмечали концептуальные трудности интерпретации неатомической экономики. Предположение о неатомическом пространстве с мерой вводится для построения математической модели "идеальной экономики", в которой ни один участник индивидуально не оказывает абсолютно никакого влияния на результат деятельности коалиций и, следовательно, на цены. Здравый смысл подсказывает, что в простой экономике со многими участниками влияние каждого отдельного участника, при условии что он не занимает какого-либо особого положения на рынке, окажется незначительным и будет становиться пренебрежимо малым, если число участников неограниченно возрастает.

Сформулируем теперь это менее радикальное понятие чистой конкуренции (разумеется, оставаясь в рамках чистого обмена).

Рассмотрим с этой целью последовательность $\mathscr{E}_n\colon A_n \to \mathscr{P} \times \mathbf{R}^l$ простых экономик. Какое свойство этой последовательности будет соответствовать тому требованию, что влияние каждого участника становится пренебрежимо малым?

Очевидно, первым условием является стремление числа участников к бесконечности:

(I) $|A_n| \to \infty$.

Далее, распределение по предпочтениям — первоначальным ресурсам μ_n в каждой из экономик $\mathscr{E}_n$ — должно быть "примерно" одним и тем же, поскольку фактически мы собираемся говорить об одной и той же экономике, но с возрастающим уровнем конкуренции. Формально это выглядит так:

(II) *последовательность (μ_n) распределений по предпочтениям — первоначальным ресурсам слабо сходится.*

Эти два условия, однако, еще не исключают возможности для некоторого небольшого числа участников занимать "особое рыночное положение". Пусть, например, $\mathscr{E}_n$ — экономика с n участниками, из которых $n - 1$ имеют первоначальный ресурс $(0, 1)$, а один обладает ресурсом $(n, 0)$. Все отношения предпочтения для простоты будем считать одинаковыми. Очевидно, условия (I) и (II) здесь соблюдаются. Однако, чем больше экономика, тем*) большим влиянием будет располагать участник с ресурсом $(n, 0)$. Отметим, что его относительный ресурс $\frac{1}{n}(n, 0) = (1, 0)$

*) То есть в данном случае, чем больше число n. (*Примеч. ред.*)

с ростом n не стремится к нулю. (Более детально этот пример разбирается в задаче 6.)

Картина резко изменяется, если первым товаром обладает достаточно большое число других участников. Например, пусть $|A_n| = 2n + 1$, причем каждый из n участников имеет первоначальный ресурс $(0, 1)$, каждый из других n участников — ресурс $(1, 0)$, а один участник — первоначальный ресурс $(\sqrt{n}, 0)$. Мы утверждаем, что участник с ресурсом $(\sqrt{n}, 0)$ не занимает какого-либо особого положения на рынке. Условие, которое исключает возможность для какого-либо участника занять особое положение, формально выглядит следующим образом:

(III)$'$ *если* $\mathcal{E}_n \subset A_n$ $(n = 1, \ldots)$ *и* $(|E_n|/|A_n|) \to 0$, *то для любого товара* h

$$\frac{\sum\limits_{E_n} e^h \circ \mathcal{E}_n}{\sum\limits_{A_n} e^h \circ \mathcal{E}_n} \to 0.$$

Это значит, что доля суммарного первоначального ресурса в товаре h, *находящаяся в распоряжении группы* E_n, *стремится к* 0, *если доля группы* E_n *в общем числе участников стремится к* 0.

Для упрощения рассуждений потребуем, чтобы для любого товара h последовательность

$$(1/|A_n|) \sum_{A_n} e^h \circ \mathcal{E}_n$$

средних первоначальных ресурсов была сходящейся и чтобы ее предел отличался от 0. При этом дополнительном предположении свойство (III)$'$ сводится к следующему:

(III)$''$ *если* $E_n \subset A_n$ $(n = 1, \ldots)$ *и* $(|E_n|/|A_n|) \to 0$, *то*

$$\frac{1}{|A_n|} \sum_{E_n} e \circ \mathcal{E}_n \to 0.$$

Если первоначальные ресурсы всех участников принадлежат положительному ортанту $\mathbf{R}^l_+$, то из D.I, (42) следует, что свойство (III)$''$ эквивалентно следующему:

(III) $\int e d\mu_n \to \int e d\mu$, *где* $\mu = \lim\limits_n \mu_n$.

Очевидно, что свойство (III) следует из (II), если все векторы первоначальных ресурсов принадлежат ограниченному множеству.

В предшествующих рассуждениях чисто конкурентная последовательность экономик была определена свойствами (I)—(III). Однако в большинстве случаев последовательность $(\mathcal{E}_n)$ простых экономик формируется из характеристик участников, принадлежащих некоторому собственному подмножеству $\mathbf{T}$ пространства $\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$. Например, $\mathbf{T}$ может быть равным $\mathcal{P}_{mo} \times \mathbf{R}^l_+$ или $\mathcal{P}^*_{co} \times (0, \infty)^l$. В таких случаях естественно рассматривать распределение по предпочтениям — ресурсам экономик $\mathcal{E}_n$ не в $\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$, а в подпространстве $\mathbf{T}$ и требовать, чтобы последовательность распределений по предпочтениям — первоначальным ресурсам сходилась слабо на $\mathbf{T}$. Заметим, что это является более сильным предположением, чем требование сходимости распределений на всем пространстве $\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$. Действительно, легко доказать, что последовательность $(\mathcal{E}_n)$ с характеристиками из $\mathbf{T}$ сходится по распределению на $\mathbf{T}$ тогда и только тогда, когда последовательность $(\mathcal{E}_n)$ сходится по распределению на $\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$ и предельная мера μ сосредоточена на $\mathbf{T}$, т.е. внешняя мера $\mu^*(\mathbf{T})$ множества $\mathbf{T}$ равна единице, где

$$\mu^*(\mathbf{T}) := \inf\{\mu(B) | \mathbf{T} \subset B, \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l)\}.$$

Этим мотивируется следующее определение.

Определение 4. Пусть $\mathbf{T}$ – произвольное подмножество множества $\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$. Последовательность $(\mathcal{E}_n)$ простых экономик с характеристиками из $\mathbf{T}$ называется *чисто конкурентной* на $\mathbf{T}$, если:

(I) число $|A_n|$ участников экономики $\mathcal{E}_n$ стремится к бесконечности;

(II) последовательность (μ_n) распределений по предпочтениям – первоначальным ресурсам сходится слабо на $\mathbf{T}$;

(III) $\lim \int e d\mu_n = \int e d\mu$;

(IV) $\int e d\mu > 0$.

Примеры. 1. Последовательность кратных экономик. Пусть $\mathcal{E}: A \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l_+$ является простой экономикой со строго положительными первоначальными ресурсами и пусть $\mathcal{E}_n: A_n \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l_+$ – ее n-кратное повторение экономики $\mathcal{E}$, т.е. $|A_n| = n|A|$ и $\mu = \mu_n$ $(n = 1, \ldots)$.

2. Последовательность типизированных экономик. Пусть последовательность $\mathcal{E}_n: A_n \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l_+$ простых экономик такова, что все распределения по предпочтениям – ресурсам имеют один и тот же носитель $\operatorname{supp}(\mu_n) =: \mathbf{T}$ $(n = 1, \ldots)$, $\sum\limits_T e > 0$, $A_n \to \infty$ и

$$\lim \frac{1}{|A_n|} \cdot |\{a \in A_n \,|\, \mathcal{E}_n(a) = (\succ, e)\}| > 0 \text{ для } (\succ, e) \in \mathbf{T}.$$

3. Последовательность выборочных экономик. Пусть μ – произвольная мера на $\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l_+$, для которой $0 < \int e d\mu < \infty$. Извлечем независимую выборку объема h из распределения μ. Она определяет простую экономику $\mathcal{E}_n$ с n участниками. Такая последовательность $(\mathcal{E}_n)$ "выборочных экономик" является чисто конкурентной (с вероятностью единица).

Большинство результатов, полученных для неатомических экономик, можно (после соответствующей переформулировки) получить и для чисто конкурентной последовательности. Однако при этом в значительной степени утрачивается их элегантность. Таким образом, мы проводим различие между "теоремами в пределе" и "предельными теоремами". Примерами таких пар теорем могут служить теорема 1 этой главы и теорема 1 гл. 3, а также теоремы 2 и 3 из этой главы.

Приведем, наконец, результат, который весьма естественным образом связывает чисто конкурентную последовательность с неатомической экономикой.

Непрерывное представление последовательности простых экономик. Пусть $(\mathcal{E}_n)$ – чисто конкурентная последовательность простых экономик, причем $\mathcal{E}_n: A_n \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$. *Непрерывное представление* последовательности $(\mathcal{E}_n)$ определяется как пара из неатомической экономики $\mathcal{E}: (A, \mathcal{A}, \nu) \to$ $\to \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$ и последовательности (α_n) измеримых отображений $\alpha_n: A \to A_n$, причем эти объекты обладают следующими свойствами:

(I) $\nu(\alpha_n^{-1}(S)) = (\,|S|/|A_n|\,)$ для любого $S \subset A_n$, $n = 1, \ldots$;

(II) $\tilde{\mathcal{E}}_n := \mathcal{E}_n \circ \alpha_n \to \mathcal{E}$ почти всюду в A.

Таким образом, неатомическая экономика $\tilde{\mathcal{E}}_n$ и простая экономика $\mathcal{E}_n$ имеют одинаковые распределения μ_n характеристик участников, и последовательность $(e \circ \tilde{\mathcal{E}}_n)$ первоначальных ресурсов сходится почти везде и в среднем к $e \circ \mathcal{E}$.

Непрерывное представление чисто конкурентной последовательности является мощным аналитическим инструментом при доказательстве асимптотических свойств множеств $C(\mathcal{E}_n)$ и $W(\mathcal{E}_n)$. Следующий результат показывает, что непрерывное представление существует всегда.

Утверждение 2. *Пусть* $\mathbf{T}$ – *борелевское подмножество* $\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$ *Пусть последовательность* $(\mathcal{E}_n)$ *простых экономик с характеристиками из* $\mathbf{T}$ *является чисто конкурентной на* $\mathbf{T}$. *Тогда*:

1. *Существует непрерывное представление.*

2. *Если* f_n – *такой дележ для экономики* $\mathcal{E}_n$, *что последовательность* (f_n) *сходится по распределению, то существуют такая подпоследовательность* $(\mathcal{E}_n)_{n\in Q}$, $Q \subset \mathbf{N}$, *и такое непрерывное представление* $(\mathcal{E}_n, \alpha_n, n \in Q)$ *этой подпоследовательности, что последовательность* $(\tilde{f}_n)_{n\in Q}$ *дележей* $\tilde{f}_n := f_n \circ \alpha_n$ *для экономик* $\tilde{\mathcal{E}}_n$ *сходятся почти всюду к дележу* f *для экономики* $\mathcal{E}$.

Доказательство 1. Применим к последовательности $\mu_n \to \mu$ теорему Скорохода (D. I, (37)). Из нее следует существование пространства с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$, которое можно считать неатомическим, а также измеримые отображения $\tilde{\mathcal{E}}_n$ $(n = 1, \ldots)$ и $\mathcal{E}$ из A в $\mathbf{T}$, для которых $\tilde{\mathcal{E}}_n \to \mathcal{E}$ почти везде в A, а распределениями для $\tilde{\mathcal{E}}_n$ и $\mathcal{E}$ являются соответственно μ_n и μ, т.е. $\mu_n = \nu \circ \tilde{\mathcal{E}}_n^{-1}$ $\mu = \nu \circ \mathcal{E}^{-1}$. Поскольку пространство с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$ является неатомическим, мы можем разбить множество $\tilde{\mathcal{E}}_n^{-1}(t)$, где $t \in \operatorname{supp}(\mu_n)$, на число $|\{a \in A_n \mid \mathcal{E}_n(a) = t\}|$ измеримых подмножеств, каждое из которых имеет одинаковую ν-меру (D. I, (15)). Каждому такому множеству соответствует один и только один участник из множества $\{a \in A_n \mid \mathcal{E}_n(a) = t\}$. Тем самым мы определим для каждого n измеримую (ступенчатую) функцию α_n, заданную на A и с множеством значений из A_n. Очевидно, отображения $\mathcal{E}$ и α_n определяют представление для последовательности $(\mathcal{E}_n)$.

2. Рассмотрим совместное распределение τ_n отображения

$(\mathcal{E}_n, f_n)\colon A_n \to \mathbf{T} \times \mathbf{R}^l$.

Последовательность (τ_n) является плотной, поскольку плотными являются последовательности из ее частных распределений (D. I, (35) и (32)). Поэтому (D. I, (31)) существует слабо сходящаяся подпоследовательность $(\tau_n)_{n\in Q}$, $Q \subset \mathbf{N}$. Применим теперь к последовательности $\tau_n \xrightarrow[n\in Q]{} \tau$ теорему Скорохода (D. I, (37)). Мы получим, что на ее основании существуют такие неатомические пространства с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$ и измеримые отображения $(\tilde{\mathcal{E}}_n, \tilde{f}_n)$ $(n = 1, \ldots)$ и $(\mathcal{E}, f)$ из A в $\mathbf{T}$, что $(\tilde{\mathcal{E}}_n, \tilde{f}_n) \to (\mathcal{E}, f)$ почти везде в A, а распределениями для $(\tilde{\mathcal{E}}_n, \tilde{f}_n)$ и $(\mathcal{E}, f)$ являются соответственно

τ_n и τ. Отображение α_n из A в A_n конструируются так же, как в доказательстве п. 1. Утверждение доказано.

Подчеркнем, что в утверждении 2 последовательность $(\mathscr{E}_n)$ может быть представлена на единичном интервале с лебеговой мерой, если множество $\mathbf{T}$ характеристик участников принадлежит множеству типа G_δ пространства $\mathscr{P} \times \mathbf{R}_+^l$. Во всех приложениях, которые будут далее встречаться в этой книге, это будет фактически иметь место; например, $\mathbf{T} = \mathscr{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_+^l$ или $\mathbf{T} = \mathscr{P}^*_{\substack{\mathrm{mo}\\ \mathrm{sco}}} \times \mathbf{R}_+^l$.

Задачи

Задача 1. Пусть $\mathscr{E}: (A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathscr{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_+^l$ является неатомической экономикой, для которой $\int e\, d\nu > 0$.

Доказать, что для достижимого дележа $f \notin C(\mathscr{E})$ существуют такие коалиции S и дележ g, что:

(I) $g(a) \succ_a f(a)$ почти везде в S;

(II)$'$ $\int_S (g - e)\, d\nu < 0$.

Если A является полным и сепарабельным метрическим пространством, а $\mathscr{A}$ состоит из борелевских подмножеств A, то множество S можно выбрать компактным, а дележ g – непрерывным на S.

Указание. Воспользоваться доказательством теоремы 1 и показать, что дележ, который не может быть улучшен в соответствии с (I) и (II), является вальрасовским. Для доказательства п. 2 воспользоваться теоремой Лузина.

Задача 2. Пусть $\mathscr{E}: (A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathscr{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_+^l$ – неатомическая экономика. Доказать, что если дележ для $\mathscr{E}$ не принадлежит ядру $\mathscr{E}$, то для любого $\epsilon \in (0, 1)$ существует коалиция S, для которой $\nu(S) = \epsilon$ и которая может улучшить дележ f (Шмайдлер, 1972; Винд, 1972).

Задача 3. Пусть

$$\mathscr{E}: (A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathscr{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_+^l$$

является неатомической экономикой, для которой $\int e\, d\nu > 0$.

Пусть далее $\delta: A \times A \to \mathbf{R}$ – такая измеримая функция, что для любого $\epsilon > 0$ существует счетное подмножество $\{a_1, a_2, \ldots\}$ множества A, для которого

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a \in A \mid \delta(a, a_n) \leqq \epsilon\}.$$

Функция δ называется *функцией смежности*. Например,

$$\delta(a, a') = d(\succ_a, \succ_{a'}) + (e_a - e_{a'}),$$

где d обозначает метрику для топологии замкнутой сходимости на $\mathscr{P}$

Для любого $\epsilon > 0$ определим семейство коалиций, полагая

$$\mathscr{A}_\epsilon := \left\{ S \in \mathscr{A} \;\middle|\; \begin{array}{l} \nu(S) \leqq \epsilon \text{ и } S = \bigcup_{i=1}^{l} S_i, \text{ где } S_i \in \mathscr{A}, \\ \\ \delta(a, a') \leqq \epsilon \text{ для любых } a, a' \in S_i \ (i = 1, \ldots, e) \end{array} \right\}.$$

Наконец, пусть $\mathbf{C}(\mathcal{E}/\mathcal{A}_\epsilon)$ означает c-ядро экономики $\mathcal{E}$, в которой улучшение разрешается только коалициям из $\mathcal{A}_\epsilon$. Показать, что для любого $\epsilon > 0$ имеет место $\mathbf{C}(\mathcal{E}/\mathcal{A}_\epsilon) = \mathbf{W}(\mathcal{E})$ (Гродал, 1972).

З а д а ч а 4 (предельная теорема Эджворта). Пусть

$$\mathcal{E}: A \to \mathcal{P}^*_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$$

– простая экономика с $\int e\,d\nu > 0$. Воспользоваться теоремой 1 для доказательства того, что $f \in \mathbf{W}(\mathcal{E})$ тогда и только тогда, когда $f_n \in \mathbf{C}(\mathcal{E}_n)$ $(n = 1, \ldots)$, где f_n и $\mathcal{E}_n$ обозначают n-кратную реплику f и $\mathcal{E}$ соответственно (Дрезе, Герт, Габилвич, 1969).

З а д а ч а 5 (симметрия). Пусть

$$\mathcal{E}: A \to \mathcal{P}_{\substack{\mathrm{sco}\\ \mathrm{mo}}} \times \mathbf{R}^l_+$$

– простая экономика, а $\mathcal{E}_n$ – ее n-кратная реплика.

Показать, что если $f \in \mathbf{C}(\mathcal{E}_n)$, то $f(a) = f(a')$ для участников a и a', имеющих одинаковые характеристики, т.е. $\mathcal{E}_n(a) = \mathcal{E}_n(a')$. Что изменится, если предположить предпочтения выпуклыми, но не строго выпуклыми?

У к а з а н и е. Пусть A^a_n означает множество n участников экономики $\mathcal{E}_n$ (число $n > 1$ и является фиксированным), которые имеют характеристики $\mathcal{E}(a)$. Пусть для $b^a \in A^a_n$ выполняется $f(b^a) \precsim_a f(a')$ для всех $a' \in A^a_n$. Допустить, что утверждение неверно, и показать, что коалиция $\{b^a\}_{a \in A}$ может улучшить дележ f, заменив его дележом

$$g(b^a) := \frac{1}{n} \sum_{a' \in A^a_n} f(a'), \quad a \in A$$

(Дебре, Скарф, 1963).

З а д а ч а 6 (пример последовательности, не являющейся чисто конкурентной). Рассмотрим последовательность $(\mathcal{E}_n)$ экономик $\mathcal{E}_n$, определяемых следующим образом: все участники имеют одно и то же отношение предпочтений на $\mathbf{R}^2_+$, заданное функцией полезности $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Далее, n участников (скажем $1, \ldots, n$) имеют вектор первоначальных ресурсов $(4, 0)$, а один (скажем $n + 1$-й) имеет вектор первоначальных ресурсов $(0, 4n)$. (Последовательность не является чисто конкурентной.) В этом случае для любой экономики существует единственное равновесие по Вальрасу: $p = (1, 1)$, $f(i) = (2, 2)$ для $i = 1, \ldots, n$ и $f(n + 1) = (2n, 2n)$.

Показать, что дележ f_n для экономики $\mathcal{E}_n$, задаваемый как $f_n(i) = (1, 1)$ для $i = 1, \ldots, n$ и $f_n(n + 1) = (3n, 3n)$, принадлежат c-ядру для всех n.

Показать далее, что для любого $\epsilon > 0$ дележ g_n для $\mathcal{E}_n$, определяемый как

$$g_n(i) = (2 + \epsilon, 2 + \epsilon) \text{ для } i = 1, \ldots, n,$$

$$g_n(n + 1) = (n(2 - \epsilon), n(2 - \epsilon));$$

при достаточно больших n не принадлежит c-ядру (Габшевич, 1970).

З а д а ч а 7 (c-ядро экономики, имеющей атомы). Пусть

$$\mathcal{E}: (A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$$

– выпуклая экономика обмена. Показать, что если $f \in \mathbf{C}(\mathcal{E})$, то существует вектор цен $p \in \mathbf{R}^l$, $p \neq 0$, для которого:

(a) почти всюду в A $f(a)$ является максимальным элементом для ${}_a\prec$ в множестве $\{x \in \mathbf{R}^l_+ \mid px \leqslant pf(a)\}$;

(b) $pf(a) \leqq pe(a)$ для почти всех участников в неатомической части пространства $(A, \mathcal{A}, \nu)$.

Указание. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, где было положено

$$\psi(a) := \{x \in \mathbf{R}^l_+ \mid x \succ_a f(a)\} - f(a),$$

если a принадлежит атому, и

$$\psi(a) := [\{x \in \mathbf{R}^l_+ \mid x \succ_a f(a)\} - f(a)] \cup [e(a) - f(a)],$$

если a принадлежит неатомической части $(A, \mathcal{A}, \nu)$ (Шитович, 1974).

Задача 8 (обобщение теоремы 1). Экономика

$$\mathcal{E} : (A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$$

называется *нередуцируемой*, если для любого разбиения $\{S, T\}$ пространства $(A, \mathcal{A}, \nu)$ (т.е. при $S \cup T = A$, $S \cap T = \phi$ и $0 < \nu(S) < 1$) и любого достижимого дележа f существует такое распределение h, что

$$\int_T (e - h)\, d\nu + \int_S f\, d\nu \in \int_S \{x \in X(a) \mid x \succ_a f(a)\}\, d\nu.$$

(Нередуцируемость выражает здесь идею желательности каждого товара.) Получить следующий результат. Пусть

$$\mathcal{E} : (A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}_{\text{ins}} \times \mathbf{R}^l$$

– нередуцируемая, неатомическая экономика, для которой $\int e\, d\nu$ принадлежит внутренности $\int X d\nu$. Тогда $C(\mathcal{E}) = W(\mathcal{E})$.

Указание. Аналогично доказательству теоремы 1 показывается, что для любого $f \in C(\mathcal{E})$ существует такой вектор цен $p \in \mathbf{R}^l$, $p \neq 0$, что $f(a)$ принадлежит множеству квазиспроса $\tilde{\varphi}(X_a, \succ_a, pe(a), p)$. Рассмотреть затем множество $T = \{a \in A \mid \inf pX(a) = pe(a)\}$. Воспользоваться нередуцируемостью экономики для доказательства того, что либо $\nu(T) = 1$, либо $\nu(T) = 0$. Показать, что первая альтернатива невозможна, поскольку $\int e\, d\nu \in \operatorname{int} \int X d\nu$.

Задача 9 (элементарное доказательство теоремы 1). Существенным шагом при доказательстве теоремы 1 было применение теоремы отделимости к выпуклому множеству

$$\int (\{x \in \mathbf{R}^l \mid f(a) \,{}_a\prec\, x + e(a)\} \cup \{0\})\, d\nu$$

для получения вектора цен со свойством (2): почти везде в A $pe(a) \leqq px$ для любого $x \succ_a f(a)$. Для этого нам понадобились два свойства интеграла от соответствия: теорема 3 из D.II.4 (при доказательстве которой необходима теорема Ляпунова в l-мерном пространстве) и утверждение 6 из D.II.4 (при доказательстве которого использовалась теорема о существовании измеримого селектора).

Показать, что свойство (2) может быть получено использованием лишь одномерной теоремы Ляпунова (доказательство которой существенно проще, чем для общего случая l измерений). Для этого воспользоваться следующим результатом (Ауман, 1964, лемма 4.1): существует такое подмножество $A' \subset A$, для которого $\nu(A) = 1$ и 0 не является внутренней точкой множества

$$\operatorname{conv} \bigcup_{a \in A'} \{x \in \mathbf{R}^l \mid x + e(a) \succ_a f(a)\}.$$

Указание. Пусть N – множество векторов x с рациональными координатами в $\mathbf{R}^l$, для которого

$$\nu\{a \in A \mid x + e(a) \succ_a f(a)\} = 0.$$

Положим

$$A' = A \setminus \bigcup_{x \in N} \{a \in A \mid x + e(a) \succ_{a_0} f(a)\}.$$

Если бы 0 был внутренней точкой указанного множества, то существовали бы такие участники экономики $a_1, \ldots, a_k$ в A', рациональные векторы $r_1, \ldots, r_k$ в $\mathbf{R}^l$ и положительные рациональные числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, для которых было бы $r_0 + e(a_i) \succ_{a_i} f(a_i)$ и $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i r_i < 0$.

Пусть

$$-r := \sum_{i=1}^{k} \gamma_i r_i, \qquad a_0 \in A'.$$

Для достаточно больших α выполняется $\alpha r + e(a_0) \succ_{a_0} f(a_0)$. Положим

$$r_0 = \alpha r, \alpha_0 = 1/(\alpha + 1), \qquad \alpha_i = \alpha\gamma_i/(\alpha + 1), \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Тогда

$$\alpha_i > 0, \ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1, \qquad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i r_i = 0.$$

Показать, что существует достаточно малое положительное число δ, для которого можно построить такие подмножества S_i множества $\{a \in A' \mid r_i + e(a_i) \succ_{a_i} f(a_i)\}$, что $\nu(S_i) = \delta a_i$.

Показать, используя дележ

$$g(a) := \begin{cases} r_i + e(a), & \text{если } a \in S_i, \\ e(a), & \text{если } a \notin S, \end{cases}$$

что коалиция $S := \bigcup_{i=0}^{k} S_i$ может улучшить дележ f (Ауман, 1964).

Примечания к § 2.1

Понятие общего экономического равновесия было строго определено Леоном Вальрасом (1834–1910) в его книге "Elements" (1874). Вальрас полностью отдавал себе отчет в наличии проблемы существования (см. примечание к § 2.2) и неединственности равновесия (лекция 7). Он полагал, однако, что существует тенденция к единственности равновесных цен при большом числе товаров (последний раздел лекции 15). Вальрас четко различал проблемы существования и устойчивости. Проблему существования мы будем рассматривать в § 2.2. К сожалению, об устойчивости в его книге ничего не говорится.

Определение 2 в этой главе характеризует некоторые состояния экономики посредством цен. В этом определении нет ничего "конкурентного", и даже наоборот! Поэтому мы назвали это понятие "равновесием по Вальрасу", а не "конкурентным равновесием", как это обычно принято. Прилагательное "конкурентный" было добавлено (Вальрас говорил просто о "равновесии") потому, что поведенческое предположение, на котором это понятие основано, правдоподобно именно в ситуации "совершенной конкуренции". Однако это понятие было четко сформулировано лишь недавно.

Стиглер (1957) заметил: "К этому понятию, столь же необходимому и фундаментальному в структуре классической и неоклассической экономической теории, как и любое другое, долгое время подходили со снисходительной небрежностью, с которой подходят ко всему интуитивно очевидному". В ограниченных рамках данной главы каждый – говорит ли он о "неограниченной" (Курно), "свободной" (Вальрас), "чистой" (Чемберлен) или "совершенной" (Робинсон) конкуренции – согласится с описанием конкуренции как такой ситуации, в которой влиянием каждого отдельного участника можно пренебречь.

Строгое определение экономики, в которой такая ситуация преобладает, было дано Ауманом (1964), который ввел понятие "неатомическая экономика": "Хотя писавшие об экономическом равновесии по традиции предполагали совершенную конкуренцию, они, как это ни парадоксально, использовали математическую модель, не удовлетворяющую этому предположению. Действительно, влияние индивидуального участника на экономику математически не может считаться пренебрежимым до тех пор, пока число участников конечно ... Мы полагаем, что наиболее естественная модель для этих целей содержит континуум участников. . . "

Следует отметить, что в теории игр континуум игроков был впервые введен Шепли (1953, 1961), а также Милнором и Шепли (1961). См., кроме того, работы Шепли и Шапиро (1960), Дэвиса (1961) и Пелега (1963).

Ранее континуум участников уже рассматривали (правда, для совершенно иных целей) Аллен и Боули (1935) и Хаутэккер (1955) (а также, скорее всего, еще и другие авторы).

Фрэнсис Эджворт (1845–1926) в своей "Математической психологии" (1881) ввел понятия "улучшение" и "c-ядро" в терминах "переговоров" и "кривой контрактов", чтобы описать возможные результаты в экономике обмена с двумя товарами и двумя типами участников. Он заметил, что равновесие по Вальрасу лежит на кривой контрактов (утверждение 1) и ничто не указывает на то, что в случае небольшого числа участников равновесие по Вальрасу играет особую роль. Затем он сформулировал "предельную" теорему о c-ядре, на которую в учебниках по экономике ссылаются как на "утверждение Эджворта". c-ядро стягивается к равновесию по Вальрасу, когда экономика становится большой. Что имел в виду Эджворт, помимо этого, можно только догадываться.

Фундаментальный вклад Эджворта почти не привлек внимания и не получил дальнейшего развития в течение почти 80 лет. Как указывает Шумпетер, "имеется большая серия его [Эджворта] работ на экономические темы, однако мощная оригинальность некоторых из них, прячущаяся за особенностями изложения, была оценена по достоинству лишь немногими"

(1954, с. 831). Строгое изложение важнейших разделов "Математической психологии" с использованием современной терминологии можно найти у Дебре и Скарфа (1972).

Заново понятие c-ядра возникло в другом виде в теории игр с трансферабельной полезностью. Соответствующее определение было дано Джиллисом и Шепли (1953). Связь между кривой контрактов Эджворта и c-ядром игры выявил Шубик (1959), который обратил внимание на значение "Математической психологии" Эджворта.

Важный результат этого совпадение c-ядра и множества вальрасовских дележей для неатомической экономики (теорема 1) – принадлежит Ауману (1964). Этим фундаментальным результатом увенчались попытки Скарфа (1962) и Дебре (1963), которые сформулировали теоремы эквивалентности для экономик с несчетным множеством участников. Однако использовавшаяся ими модель едва ли была удовлетворительной.

Теорема 1 была распространена на случай более общих экономик Гильденбрандом (1968, 1972). Обобщения на случай бесконечномерных пространств товаров были получены Бьюли (1973) и Мертенсом (не опубликовано).

В альтернативной модели, в которой первичным понятием считаются коалиции, а не отдельные участники и в которой, следовательно, предпочтения определяются сразу для коалиций, совпадение c-ядра с множеством равновесий по Вальрасу было доказано Виндом (1964). Результат Винда был обобщен Р. Корнуоллом (1969) и Рихтером (1971). Эквивалентность модели, основанной на индивидуальных участниках (Ауман), и модели, основанной на коалициях (Винд), была установлена Дебре (1967).

Условия, при которых c-ядро и множество равновесий по Вальрасу совпадают, если пространства с мерой имеют атомы, были сформулированы Габзевичем и Мертенсом (1971) и Шитовичем (1974).

Идея описания "чистой конкуренции" как асимптотического свойства последовательности экономик является старой. Эджворт, например, уже применял последовательности кратных экономик. Общее понятие "чисто конкурентная последовательность", приведенное в определении 4 (с использованием слабой сходимости распределений по предпочтениям – запасам), и применение теоремы Скорохода для представления ее в виде последовательности, описанной в утверждении 2, взяты из работы Гильденбранда (1970).

Упомянем, наконец, совершенно иной подход к доказательству совпадения c-ядра и множества вальрасовских дележей, использующий нестандартный анализ. Он был осуществлен Брауном и Робинсон (1974) и Ханом (1973).

§ 2.2. Определенность равновесия

Введение. Существование равновесия по Вальрасу для простых экономик с выпуклыми предпочтениями широко освещалось в литературе (см. примечания к § 2.2). В этом параграфе мы исследуем существование равновесных цен для экономики обмена, обращая особое внимание на случай, когда выпуклость предпочтений не предполагается. Ясно, что классическое допущение о выпуклости не может быть просто отброшено. В самом деле, для экономики, в которой влиянием какого-то индивидуального участника нельзя пренебречь, выпуклость его предпочтений при доказательстве существования равновесия существенна. Тот крайний случай, когда экономика является неатомической, оказывается особенно простым (теорема 2). Для неатомической экономики средний спрос оказывается выпуклым (утверждение 4 из § 1.3), и поэтому можно использовать стандартные теоремы о неподвижной точке. В случае простой экономики с невыпуклыми предпочтениями множество среднего спроса может оказаться невыпуклым. Однако предположение о большом числе участников приводит к эффекту выпуклости среднего спроса (утверждение 5 из § 1.3). Это позволяет доказать существование "приближенных" равновесных цен, степень приближения которых зависит от размера экономики (теорема 3).

Результаты этого параграфа со всей очевидностью демонстрируют важную роль, которую имеет для существования равновесия в случае невыпуклых предпочтений число участников экономики.

Утверждение 4 и следствия из него показывают, что равновесные цены зависят от определяющих экономику параметров непрерывно.

Обозначения. В случае, когда $t := (X, \succ, e) \in \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$ и $p \in \mathbf{R}^l$, будем вместо $\varphi(X, \succ, p \cdot e, p)$ писать $\varphi(t, p)$. Соответственно этому средний спрос экономики $\mathcal{E}$: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$ при заданном векторе цен p обозначается в виде

$$\Phi(\mathcal{E}, p) := \int \varphi(\mathcal{E}(\cdot), p) d\nu.$$

При заданных $\mathcal{E}$ и p отображение $\mathcal{E}^p$: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}$:

$$\mathcal{E}^p(a) := (X_{\mathcal{E}(a)}, \succ_{\mathcal{E}(a)}, p \cdot e_{\mathcal{E}(a)}),$$

определяет потребительский сектор. Вместе с обозначениями § 1.3 мы естественно получаем $\Phi(\mathcal{E}, p) = \Phi(\mathcal{E}^p, p)$. Однако множества

$$\int_{\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l} \varphi(t, p) d\mu_{\mathcal{E}}, \qquad \int_{\mathcal{P} \times \mathbf{R}} \varphi(\cdot, \cdot, p) d\mu_{\mathcal{E}^p}$$

могут оказаться различными, а совпадать будут только их выпуклые оболочки. Наконец, если последовательность экономик $(\mathcal{E}_n)$ сходится по распределению к экономике $\mathcal{E}$, причем $p_n \to p$, то (D.I, (38)) последовательность потребительских секторов $(\mathcal{E}_n^{p_n})$ сходится по распределению к потребительскому сектору $\mathcal{E}^p$.

Существование равновесия. Пусть $\mathcal{E}$ – экономика обмена. Для любого вектора цен p рассмотрим *средний избыточный спрос* $Z(p)$:

$$Z(p) := \Phi(\mathcal{E}, p) - \int e d\nu.$$

Вектор цен p^* является равновесием для $\mathcal{E}$, если $0 \in Z(p^*)$.

Существование равновесных цен для экономики $\mathcal{E}$ зависит поэтому от свойств отношения среднего избыточного спроса Z. Основные свойства Z сформулированы в виде следующего утверждения.

Утверждение 3. *Пусть*

$$\mathcal{E}: (A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$$

– экономика обмена, для которой $\int e d\nu > 0$. *Тогда соответствие среднего спроса* Z *обладает следующими свойствами:*

(I) *Z является однородным соответствием нулевой степени, т.е. для любого вектора $p > 0$ и $\lambda > 0$ имеет место $Z(p) = Z(\lambda p)$.*

(II) (Закон Вальраса.) *Для любого вектора цен $p > 0$ и $z \in Z(p)$ должно быть $pz = 0$.*

(III) *Соответствие Z является компактнозначным, ограниченным снизу и полунепрерывным сверху.*

(IV) *Если последовательность (p_n) строго положительных векторов цен сходится к вектору p, который не является строго положительным, то*

$$\inf \left\{ \sum_{n=1}^{l} z^h \,\middle|\, z \in Z(p_n) \right\} > 0$$

для достаточно больших n.

Доказательство. Свойство (I) следует непосредственно из определения множества $Z(p)$. Поскольку предпочтения монотонны, должно быть $px = p \cdot e(a)$ для любого $x \in \varphi(\&(a), p)$. Отсюда, очевидно, следует свойство (II).

Пусть $\bar{p} > 0$. Тогда существует окрестность U точки $\bar{p}$, состоящая из строго положительных векторов. Применим к соответствию $(a,p) \mapsto \varphi(\&(a), p)$, $a \in A$, $p \in U$, утверждение 8 из D.II.4. Для фиксированного $a \in A$ соответствие $p \mapsto \varphi(\&(a), p)$ замкнуто в точке $\bar{p}$ (§ 1.2, следствие 2 утверждения 3). Далее, существует такая интегрируемая функция h из A в $\mathbf{R}$, что $|\varphi(\&(a), p)| \leqq h(a)$ для любого $a \in A$ и $p \in U$ (например, $h(a) = (1/\pi) \cdot |e(a)|$, где $\pi = \min\{p^h \mid p \in U$ и $h = 1, \ldots, e\}$). Таким образом, на основании утверждения 8 из D.II.4 получаем, что соответствие $p \mapsto \Phi(\&, p)$ замкнуто в точке $\bar{p}$. Поскольку соответствие $\Phi(\&, \cdot)$ ограничено в окрестности U точки $\bar{p}$, оно является компактнозначным и полунепрерывным сверху в точке $\bar{p}$. Отсюда, очевидно, следует свойство (III). Наконец, свойство (IV) следует из утверждения 6, § 1.3, поскольку по предположению предпочтения монотонны и $\int e\,d\nu > 0$. Утверждение доказано.

Следующая лемма представляет фундаментальный математический результат для анализа экономического равновесия.

Лемма 1. *Пусть Z — соответствие из Δ в $\mathbf{R}^l$, которое обладает свойствами* (II) — (IV) *из утверждения* 3. *Тогда существует такой вектор $p^* > 0$, что $0 \in \operatorname{conv} Z(p^*)$.*

Доказательство. Пусть

$$\Delta_n := \left\{ p \in \mathbf{R}^l_+ \,\middle|\, \sum_{h=1} p^h = 1 \quad \text{и} \quad p^h \geqslant \frac{1}{n}, \quad h = 1, \ldots, l \right\}, \quad n \geqq l.$$

Применим к соответствию $p \mapsto \operatorname{conv} Z(p)$, действующему из Δ_n в $\mathbf{R}^l$, теорему о неподвижной точке из C.I, (15). Все предположения из C.I, (15) здесь выполняются, поскольку $\operatorname{conv} Z$ снова полунепрерывно сверху (B.III, утверждение 6). Поэтому существуют такие векторы $p_n \in \Delta_n$ и $z_n \in \mathbf{R}^l$, что:

(1) $z_n \in \operatorname{conv} Z(p_n)$;

(2) $pZ_n \leqq 0$ для любого $p \in \Delta_n$ $(n \geqq l)$.

Нам осталось показать, что для некоторого n должно быть $z_n = 0$. Не умаляя общности, можно предположить, что последовательность (p_n) сходится; пусть, скажем, $p_n \to p \in \Delta$. Мы утверждаем, что $p > 0$. Действительно, в противном случае из условия (IV) и свойства (I) следовало бы, что $\sum_{h=1}^{l} z_n^h > 0$ для достаточно больших n. Но из свойства (2) следует неравенство $\sum_{h=1}^{l} z_n^h \leqq 0$, и мы получаем противоречие.

Наконец, из $p > 0$ следует, что для достаточно больших n будет $z_n = 0$. Действительно, пусть $\bar{n}$ таково, что p принадлежит внутренности $\Delta_{\bar{n}}$. По закону Вальраса (условие (II)) $p_n z_n = 0$. Поскольку для достаточно больших n p_n принадлежит внутренности $\Delta_{\bar{n}}$, из свойства (2) следует, что $z_n = 0$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть*

$\mathscr{E}$: $(A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathscr{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_+^l$

– выпуклая экономика обмена, для которой $\int e\, d\nu > 0$. *Тогда для некоторого вектора цен* $p^* > 0$ *существует равновесие по Вальрасу* (f^*, p^*).

Доказательство. Теорема 2 сразу же следует из утверждения 3 и леммы 1, поскольку средний спрос $\Phi(\mathscr{E}, p^*)$ выпуклой экономики является выпуклым (§ 1.3, утверждение 4).

Следствие. *Для любой выпуклой экономики обмена* $\mathscr{E}$: $(A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathscr{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_+^l$, *для которой* $\int e\, d\nu > 0$, *с-ядро непусто.*

Замечание. Представляется уместным подчеркнуть, что лемма 1 является теоремой существования равновесных цен в терминах соответствия избыточного спроса; этот избыточный спрос может быть выведен из микроэкономической модели, весьма отличающейся от рассмотренной здесь. До тех пор, пока индивидуальный "спрос" представляет собой функцию от цен и дохода (выводится ли "спрос" из предпочтений при бюджетном ограничении или как-то иначе) и обладает свойствами непрерывности, лемма 1 (или соответствующее ее обобщение, по поводу которого см., например, задачу 2) обеспечивает существование равновесных цен.

Для иллюстрации сказанного предположим в противоположность нашей прежней точке зрения, что участники экономики выбирают свои планы потребления из бюджетного множества случайно, например на основании подбрасывания монеты. Тогда при заданных ценах p и доходе w вектор спроса будет случайным и, например равномерно распределенным на бюджетной гиперплоскости. Предположим также (теперь уже в согласии с нашей прежней точкой зрения), что случайные спросы участников экономики являются стохастически независимыми. Легко проверить, что соответствие среднего ожидаемого спроса простой экономике, когда поведение участников носит именно такой случайный характер, обладает всеми свойствами, требуемыми леммой 1. Следовательно, в соответствии с усиленным законом больших чисел, если экономика является большой, средний спрос (являющийся случайным вектором) приближенно равен среднему ожидаемому спросу. Поэтому можно уверенно пользоваться средним ожидаемым спросом для определения равновесных цен, которые, согласно лемме 1, существуют.

Промежуточный случай, когда индивидуальное поведение не является ни "абсолютно согласованным" (если оно описывается отношением предпочтений), ни "абсолютно случайным", как в приведенном примере, рассматривается в задаче 9, где вводится понятие "случайные предпочтения".

Проведенный анализ показывает, что понятие равновесных цен для больших экономик является по отношению к индивидуальному поведению весьма устойчивым.

Замкнутость соответствия равновесных цен П. Для произвольной экономики обмена $\mathcal{E}$ обозначим символом $\Pi(\mathcal{E})$ множество нормированных равновесных цен, т.е. положим

$$\Pi(\mathcal{E}) := \{p \in \mathbf{R}^l \mid |p| = 1 \text{ и } \int e\, d\nu \in \Phi(\mathcal{E}, p)\}\ .$$

Подчеркнем, что, как правило, равновесные цены не являются единственными. В общем случае нам известно лишь то, что для выпуклой экономики

$$\mathcal{E}: (A, \mathcal{A}\ \nu) \to \mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+\ ,$$

для которой $\int e\, d\nu > 0$, множество $\Pi(\mathcal{E})$ является непустым (теорема 2) и зависит только от распределения по предпочтениям – первоначальным запасам $\mu_{\mathcal{E}}$ (§ 1.3, утверждение 4). Покажем теперь, что множество $\Pi(\mathcal{E})$ является компактным и зависит от распределения $\mu_{\mathcal{E}}$ непрерывно.

Утверждение 4. *Соответствие равновесных цен* П *для каждой выпуклой экономики обмена*

$$\mathcal{E}: (A, \mathcal{A}\ \nu) \to \mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+\ ,$$

для которой $\int e\, d\nu > 0$, *замкнуто. Это значит, что для каждой последовательности экономик обмена* $(\mathcal{E}_n)$, *для которой* $\mu_n \to \mu$ *и* $\int \mathbf{e}\, d\mu_n \to \int \mathbf{e}\, d\mu$, *выполняется*

$$\mathrm{Ls}(\Pi(\mathcal{E}_n)) \subset \Pi(\mathcal{E}).$$

Доказательство. Пусть $p_n \in \Pi(\mathcal{E}_n)$. Ввиду компактности Δ мы можем предположить, что $p := \lim p_n$. Нужно показать, что $p \in \Pi(\mathcal{E})$. Очевидно, что $p_n > 0$, поскольку предпочтения являются монотонными.

По предположенному мы имеем

$$\int \mathbf{e}\, d\mu_n \in \Phi(\mathcal{E}_n, p_n), \qquad \int \mathbf{e}\, d\mu_n \to \int \mathbf{e}\, d\mu\ .$$

Отсюда следует [§ 1.3, утверждение 6], что $p > 0$. (В действительности в утверждении 6 из § 1.3 предполагалось, что $p_n > 0$; однако это было необходимо только для того, чтобы выполнялось $\Phi(\mathcal{E}_n, p_n) \neq \phi$.) В силу теоремы 3 из § 1.3 мы получим, что $\int \mathbf{e}\, d\mu \in \operatorname{conv} \tilde{\Phi}\ (\mathcal{E}, p)$. Очевидно, что из $p > 0$ и $X(a) = \mathbf{R}^l_+$ следует $\tilde{\Phi}(\mathcal{E}, p) = \Phi(\mathcal{E}, p)$. Поскольку экономика является выпуклой, должно иметь место [§ 1.3, утверждение 4(b)] равенство $\tilde{\Phi}(\mathcal{E}, p) = \Phi(\mathcal{E}, p)$, и, следовательно, $\int e\, d\mu \in \Phi(\mathcal{E}, p)$, т.е. $p \in \Pi(\mathcal{E})$. Это и требовалось.

Замкнутость соответствия П равновесных цен является довольно слабым вариантом свойства непрерывности. Для сравнения равновесных цен, соответствующих различным параметрам модели (т.е. различным распределениям по предпочтениям – ресурсам), и тем более для анализа устойчивости равновесных цен необходимо располагать существенно более сильным вариантом непрерывности соответствия П. В приложении к данной главе мы к этому вопросу еще вернемся.

Следующее свойство непрерывности соответствия П сразу же следует из утверждения 4 и теоремы 4 из В.III.

С л е д с т в и е 1. *Пусть $\mathcal{M}$ означает множество распределений по предпочтениям – ресурсам μ на $\mathcal{P}^*_{\substack{mo\\co}} \times Q$, для которых $\int e\, d\mu > 0$, где Q – ограниченное подмножество из $\mathbf{R}^l_+$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такое открытое плотное (относительно слабой сходимости) подмножество $G \in \mathcal{M}$, для которого соответствие равновесных цен $\mu \mapsto \Pi(\mu)$ является "ϵ-непрерывным" при любом распределении $\mu \in G$, т.е. для любого $\mu \in G$ существует такая окрестность U_μ этой меры, что*

$$\sup_{\mu \in U_\mu} \delta(\Pi(\mu),\ \Pi(\mu')) < \epsilon.$$

В утверждении 4 мы рассмотрим только равновесные цены. А что можно будет сказать о множестве вальрасовских дележей $W(\mathcal{E})$, если в данной экономике изменяется распределение по предпочтениям – доходу μ?

Прежде всего отметим трудности точной формулировки вопроса, поскольку как дележ f для экономики $\mathcal{E}$, так и дележ f' для экономики $\mathcal{E}'$ являются функциями, но определенными, вообще говоря, на различных пространствах участников экономики. Вспомним, однако, что нас интересуют главным образом большие экономики. Поэтому индивидуалистическое описание дележа как варианта закрепления товаров за отдельными участниками является, по-видимому, слишком подробным. Существенной информацией о дележе для большого множества участников является его распределение в пространстве товаров. Если мы примем такую точку зрения, то адекватным понятием сходимости для дележей станет сходимость по распределению.

Следующий результат непосредственно вытекает из утверждения 4, поскольку в случае строго выпуклых предпочтений вальрасовский дележ однозначно определяется равновесным вектором цен.

С л е д с т в и е 2. *Соответствие вальрасовского дележа W является компактнозначным и полунепрерывным сверху по распределению для каждой экономики обмена*

$$\mathcal{E}\colon (A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}^*_{\substack{mo\\sco}} \times \mathbf{R}^l_+,$$

для которой $\int e d\nu > 0$; т.е. для любой последовательности $(\mathcal{E}_n)$ экономик обмена, для которой $\mu_n \to \mu$ и $\int e d\mu \to \int e d\mu$, и любой последовательности (f_n), где $f_n \in W(\mathcal{E}_n)$, существует подпоследовательность $(f_{n_q})_{q=1,\dots}$, которая сходится по распределению к дележу $f \in W(\mathcal{E})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (f_n, p_n) – равновесие по Вальрасу для экономики $\mathcal{E}_n$. Из утверждения 4 следует, что существует подпоследовательность $(p_{n_q})_{q=1,\dots}$, для которой $p_{n_q} =: p > 0$ и $p \in \Pi(\mathcal{E})$. Чтобы упростить обозначения, предположим, что исходная последовательность (p_n) сходится к p. Поскольку предполагается, что в экономике $\mathcal{E}$ предпочтения строго выпуклые, то по вектору цен $p \in \Pi(\mathcal{E})$ вальрасовский дележ f определяется как $f(a) := \varphi(\mathcal{E}(a), p)$, $a \in A$. Нам остается показать, что последовательность (f_n) сходится по распределению к f.

Сначала рассмотрим случай, когда предпочтения во всех экономиках $\mathcal{E}_n$ являются также строго выпуклыми. Тогда

$$f_n(a) = \varphi(\mathcal{E}_n(a), p_n), \qquad a \in A_n.$$

Дележ f_n, т.е. мера $\nu_n \circ f_n^{-1}$, совпадает тогда с распределением функции $\varphi(\cdot, p_n)$ относительно меры μ_n, т.е. с мерой $\mu_n \circ \varphi^{-1}(\cdot, p_n)$. Таким образом, мы должны показать, что последовательность $(\mu_n \circ \varphi^{-1}(\cdot, p_n))$ мер на $\mathbf{R}^l$ слабо сходится к мере $\mu \circ \varphi^{-1}(\cdot, p)$. Но это следует из D. I, (38), поскольку по предположенному последовательность μ_n слабо сходится к μ, а последовательность $(\varphi(\cdot, p_n))_{n=1,\ldots}$ функций сходится равномерно на компактных множествах к непрерывной функции $\varphi(\cdot, p)$. Действительно, функция $(\precsim, e, p) \mapsto \varphi(\precsim, p \cdot e, p)$, отображающая $\mathcal{P}^*_{\mathrm{mo}} \times \mathring{\Delta}$ в $\mathbf{R}^l$, является непрерывной (§ 1.2, теорема 2), и, следовательно, она равномерно непрерывна на любом компактном множестве. Из этого следует доказываемое утверждение.

Если предпочтения в экономиках $\mathcal{E}_n$ не являются строго выпуклыми, то используется теорема Скорохода (D.I, (37)), чтобы представить экономики $\mathcal{E}_n$ и все вальрасовские дележи f_n как заданные на общем пространстве с мерой. Затем доказывается, что таким образом определенная последовательность вальрасовских дележей сходится почти всюду, откуда следует (D.I, (30)) сходимость по распределению. Этим следствие доказано.

Если отказаться от предположения о строгой выпуклости предпочтений, то ситуация станет более сложной. В этом случае равновесные цены $p \in \Pi(\mathcal{E})$ уже не будут определять равновесный дележ однозначно, и может оказаться, что для двух (даже неатомических) экономик $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ с одинаковым распределением μ характеристик участников множества $W(\mathcal{E}_1)$ и $W(\mathcal{E}_2)$ не будут равны по распределению (см. задачу 6). Поэтому нам сначала необходимо обсудить, в какой степени распределения характеристик участников определяют множество распределений в вальрасовских дележах экономики $\mathcal{E}$. Это множество мер на $\mathbf{R}^l_+$ обозначается через $\mathcal{D}W(\mathcal{E})$. Очевидно, что для двух экономик $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ с одинаковым распределением, где $\mathcal{E}_1$ – простая экономика, а $\mathcal{E}_2$ – неатомическая экономика, выполняется включение $\mathcal{D}W(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{D}W(\mathcal{E}_2)$, которое, вообще говоря, является строгим. Интересующий нас вопрос состоит, однако, в том, будут ли две большие экономики, представленные как неатомические, иметь, по существу, одинаковые равновесные распределения.

Утверждение 5. *Пусть $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ – две неатомические экономики с одним и тем же распределением $\mu_{\mathcal{E}_1} = \mu_{\mathcal{E}_2}$ на $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$. Тогда множества $\mathcal{D}W(\mathcal{E}_1)$ и $\mathcal{D}W(\mathcal{E}_2)$ распределений вальрасовских дележей соответственно экономик $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ имеют одинаковые замыкания относительно слабой сходимости.*

Доказательство. Мы уже знаем, что $\Pi(\mathcal{E}_1) = \Pi(\mathcal{E}_2)$. Пусть $p \in \Pi(\mathcal{E}_1)$; обозначим через $W(\mathcal{E}_i, p)$ $(i = 1, 2)$ множество вальрасовских дележей для экономики $\mathcal{E}_i$, которое соответствует равновесным ценам p. Таким образом,

$$W(\mathcal{E}_i, p) = \{ f \in \mathcal{L}_{\varphi_i} \mid \int f = \int e \circ \mathcal{E}_i d\nu \},$$

где $\varphi_i(a) = \varphi(\mathcal{E}_i(a), p)$. Для доказательства утверждения 5 достаточно теперь показать, что

$$\overline{\mathcal{D}W(\mathcal{E}_1, p)} = \overline{\mathcal{D}W(\mathcal{E}_2, p)},$$

где замыкание берется относительно слабой сходимости.

Но это следует сразу же по теореме 7 из D.II.4. Действительно, два соответствия φ_1 и φ_2 являются интегрально ограниченными, поскольку $p > 0$, а композиция $e \circ \mathcal{E}_i$ интегрируема по условию. Очевидно, что φ_i является замкнутозначным. Отсюда в силу утверждения 1(в) из D.II.3 и утверждения 2 из § 1.2 следует, что φ_i имеют измеримый график. Наконец, φ_1 и φ_2 имеют одинаковые распределения. Действительно, для любого борелевского множества S из $\mathbf{R}^l$ должно быть

$$\nu_1(\varphi_1^{-1}(S)) = \nu_1(\mathcal{E}_1^{-1}\{(\precsim, e) \mid \varphi(\precsim, e, p) \cap S \neq 0\}) =$$

$$= \nu_2(\mathcal{E}_2^{-1}\{(\precsim, e) \mid \varphi(\precsim, e, p) \cap S \neq 0\}) = \nu_2(\varphi_2^{-1}(S)),$$

поскольку по предположению $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ имеют одинаковые распределения. Следовательно, все предположения теоремы 7 из D.II.4 выполнены, что завершает доказательство.

Возникает вопрос о существовании таких экономик, для которых множество $\mathcal{D}W(\mathcal{E})$ было бы замкнутым. Нетрудно показать (см. задачу 6), что для этого недостаточно иметь дело с большим числом участников, т.е. с неатомической экономикой. Необходимо также иметь достаточно много участников с характеристиками из носителя меры μ.

Пусть μ – распределение характеристик участников. Сконструируем следующим образом неатомическую экономику $\mathcal{E}^\mu$ с распределением μ, которую будем называть *стандартным представлением* μ.

Неатомическое пространство (участников экономики) с мерой задается как

$$A = (\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l) \times [0,1]$$

с произведением мер $\nu = \mu \otimes \lambda$, где λ – лебегова мера на $[0, 1)$. Отображение $\mathcal{E}^\mu$ представляет собой проекцию, т.е.

$$\mathcal{E}^\mu(\succ, e, \xi) = (\succ, e) \text{ для любого } (\succ, e, \xi) \in \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l \times [0,1].$$

В этих обозначениях сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 6. *Пусть μ – произвольная мера на $\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l_+$, для которой $\int e\,d\mu > 0$. Тогда множество $\mathcal{D}W(\mathcal{E}^\mu)$ распределений вальрасовских дележей стандартного представления $\mathcal{E}^\mu$ является замкнутым.*

Доказательство. Возьмем $f_n \in W(\mathcal{E}^\mu)$ и предположим, что последовательность $(\mathcal{D}f_n)$ распределений сходится. Пусть, например, $\mathcal{D}f_n \to \delta$. Нам нужно показать, что существует $f \in W(\mathcal{E}^\mu)$ с распределением $\mathcal{D}f = \delta$.

Рассмотрим совместное распределение τ_n отображения $(\mathcal{E}^\mu, f_n)$. Покажем, что существует сходящаяся подпоследовательность (τ_n). Согласно D.I, (31), для этого достаточно показать, что последовательность (τ_n) является плотной. Заметим, что ввиду D, (32) и леммы из § 1.2 последовательность μ_n является плотной. Таким образом, согласно D.I, (35), плотность последовательности (τ_n) вытекает из плотности последовательности $(\mathcal{D} f_n)$. Множество $\Pi(\mathcal{E}^\mu)$ равновесных цен является в силу утверждения 4 замкнутым и строго положительным. Поскольку по условию интеграл $\int e\,d\mu$ существует, последовательность (f_n) ограничена некоторой интегрируемой функцией. Следовательно, согласно D.I, (41), последовательность $(\mathcal{D} f_n)$ является плотной. Поэтому, не умаляя общности, можно предположить, что последовательность (τ_n) слабо сходится, скажем $\tau_n \to \tau$. Заметим, что частными распределениями τ на $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$ и $\mathbf{R}^l_+$ являются соответственно μ и δ.

Применим теперь к последовательности $\tau_n \to \tau$ теорему Скорохода (D.I, (37)). На основании этой теоремы существуют такие пространства с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$ и измеримые отображения $(\widetilde{\mathcal{E}}_n, \widetilde{f}_n)$ $(n = 1, \ldots)$ и $(\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{f})$, действующие из A в $(\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+) \times \mathbf{R}^l_+$, что $(\widetilde{\mathcal{E}}_n, \widetilde{f}_n) \to (\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{f})$ почти везде в A; распределениями для $(\widetilde{\mathcal{E}}_n, \widetilde{f}_n)$ и $(\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{f})$ являются соответственно τ_n и τ. Из того, что $(\mathcal{E}^\mu, f_n)$ и $(\widetilde{\mathcal{E}}_n, \widetilde{f}_n)$ имеют одинаковые совместные распределения τ_n и $\widetilde{f}_n \in W(\mathcal{E}^\mu)$, следует $\widetilde{f}_n \in W(\widetilde{\mathcal{E}}_n)$ $(n = 1, \ldots)$. Но из этого, а также из поточечной сходимости последовательности $(\widetilde{\mathcal{E}}_n, \widetilde{f}_n)$ к $(\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{f})$ стандартными рассуждениями можно получить, что $\widetilde{f} \in W(\widetilde{\mathcal{E}}_n)$. Для завершения доказательства остается поэтому установить, что существует такой дележ f для экономики $\mathcal{E}^\mu$, для которого совместное распределение $(\mathcal{E}^\mu, f)$ совпадает с τ. Действительно, $f \in W(\mathcal{E}^\mu)$ и $\mathcal{D} f = \delta$, поскольку $f \in W(\widetilde{\mathcal{E}})$, и совместное распределение $(\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{f})$ есть τ. Напомним, что частными распределениями для τ являются соответственно μ и δ.

Таким образом, необходимо построить измеримое отображение стандартного представления $(\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+) \times [0, 1]$ в $(\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+) \times \mathbf{R}^l_+$, распределением которого являлось бы τ и которое имело бы вид

$$(t, \xi) \mapsto (t, f(t, \xi))$$

для любых $t \in \mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l$ и $\xi \in [0, 1]$.

Это отображение получается следующим образом. Пусть для меры τ, заданной на произведении $(\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+) \times \mathbf{R}^l_+$, через δ_t обозначено (регулярное) условное вероятностное распределение $(t, \xi) \mapsto \xi$ при заданном t. Таким образом, δ_t представляет собой вероятностную меру на $\mathbf{R}^l_+$, а отображение $t \mapsto \delta_t(V)$ является измеримым для любого борелевского множества V из $\mathbf{R}^l$ и

$$\tau(U \times V) = \int_U \delta_t(V)\mu(dt)$$

для борелевских множеств U из $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$ и V из $\mathbf{R}^l$ (см., например, Лоев, 1963, § 26, 27). Каждая мера δ_t на $\mathbf{R}^l$ может быть получена как образ лебеговой меры отображения $f(t, \cdot)$: $[0, 1] \to \mathbf{R}^l_+$. Определим отображение $(t, \xi) \to \{t, f(t, \xi)\}$, которое имеет распределение τ. Функции $f(t, \ )$ можно выбрать так, что функция $f(\cdot, \cdot)$ окажется измеримой. Действительно, в силу известной теоремы об изоморфизме (см., например, Партхасаратхи (1967), теорема 2.12) можно, не умаляя общности, предположить, что меры δ_t определены на $[0, 1]$. Рассмотрим тогда функцию распределения $F(t, \cdot)$ меры δ, т.е. $F(t, \xi) = \delta_t[0, \xi]$ *). Таким образом, $F(t, \cdot)$ является непрерывной справа функцией из $[0,1]$ в $[0,1]$ для любого t, и $F(\cdot, \xi)$ измерима для любого ξ. Из этого следует, согласно D.I, (7), что функция $F(\cdot, \cdot)$ измерима. Поскольку функция $f(t, \cdot)$ получается из функции $F(t, \cdot)$ в результате зеркального отображения от диагонали, она тоже является измеримой. Теорема доказана.

Утверждения 5 и 6 дают основание для следующего определения равновесного распределения по Вальрасу, формулирующего исключительно в терминах распределений характеристик участников без указания на множество всех участников, которое более или менее произвольно.

Для каждого вектора цен $p \in \mathbf{R}^l$ определим подмножество E_p множества $(\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l) \times \mathbf{R}^l_+$:

$$E_p := \{(t, x) \in (\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l) \times \mathbf{R}^l \mid x \in \varphi(t, p)\}.$$

Пусть $\mathbf{T} \subset \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$. В дальнейшем τ всегда будет обозначать меру на пространстве $\mathbf{T} \times \mathbf{R}^l$, а ее частные распределения на $\mathbf{T}$ и $\mathbf{R}^l$ обозначаются соответственно μ и δ.

Определение 5. *Равновесным распределением по Вальрасу* для распределения μ характеристик участников в $\mathbf{T} \subset \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$ называется мера τ на $\mathbf{T} \times \mathbf{R}^l$, обладающая следующими свойствами:

(I) частным распределением на $\mathbf{T}$ является μ;

(II) $\int\limits_{\mathbf{T}} e\,d\mu = \int\limits_{\mathbf{R}^l} x\,dx$, т.е. среднее предложение равно среднему спросу;

(III) существует такой вектор цен $\bar{p} \in \mathbf{R}^l$, $p \neq 0$, что $\tau(E_p) = 1$.

Множество всех равновесных распределений по Вальрасу для распределения μ обозначается $\mathcal{D}\mathrm{W}(\mu)$.

Очевидно, что при $f \in \mathrm{W}(\mathcal{E})$, т.е. если f является вальрасовским дележом для экономики $\mathcal{E}$: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathbf{T}$, совместное распределение отображения $(\mathcal{E}, f)$ является равновесным распределением по Вальрасу для $\mu = \nu \circ \mathcal{E}^{-1}$ в смысле определения 5. Наоборот, как это показано при доказательстве утверждения 6, для каждого вальрасовского равновесного распределения τ существует такой вальрасовский дележ f для стандартного представления $\mathcal{E}^\mu$, что совместное распределение $(\mathcal{E}^\mu, f)$ составляет τ. Следовательно, определение вальрасовского равновесного распределения является простой переформулировкой стандартного определения равновесия по Вальрасу для случая больших экономик в терминах распределений.

Теорема 3. *Для любого распределения μ характеристик участников в $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$, для которого $\int e\,d\mu > 0$, существует вальрасовское равновесное*

*) В отечественной литературе было бы $F(t, \xi) = \delta_t[0, \xi)$, и эта функция была бы непрерывной слева. Ясно, что это различие носит чисто терминологический характер. (*Примеч. ред.*)

распределение $\mathfrak{D}W(\mu) \neq 0$. *Соответствие*

$$\mu \mapsto \mathfrak{D}W(\mu)$$

обладает следующим свойством непрерывности: пусть последовательность (μ_n) *слабо сходится к* μ *на* $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$, *причем*

$$\lim \int e d\mu_n = \int e d\mu > 0;$$

тогда для любой последовательности (τ_n), $\tau_n \in \mathfrak{D}W(\mu_n)$, *существует слабо сходящаяся подпоследовательность, предел которой принадлежит* $\mathfrak{D}W(\mu)$.

Отметим, что это свойство непрерывности "почти равносильно" полунепрерывности сверху относительно слабой сходимости. Единственное различие здесь лишь в том, что в дополнение к слабой сходимости $\mu_n \to \mu$ мы требуем, чтобы выполнялось еще $\int e d\mu_n \to \int e d\mu$. Очевидно, что если ограничить все меры на компактном подмножестве $\mathbf{T}$ пространства $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$, то из полученных результатов будет следовать полунепрерывность сверху соответствия $\mu \mapsto \mathfrak{D}W(\mu)$ для любой меры μ, для которой $\int e d\mu > 0$.

Доказательство. На основании теоремы 2 известно, что для любой неатомической экономики $\mathcal{E}$ с распределением μ существует вальрасовский дележ f. Следовательно, совместное распределение $(\mathcal{E}, p)$ принадлежит $\mathfrak{D}W(\cdot)$.

Для доказательства свойства непрерывности соответствия $\mathfrak{D}W(\cdot)$ возьмем $\tau_n \in \mathfrak{D}W(\mu_n)$ $(n = 1, \ldots)$. Доказательство проводится в два этапа: во-первых, будет показано, что последовательность (τ_n) относительно компактна, и, следовательно, в ней существует сходящаяся подпоследовательность; во-вторых, будет показано, что предел этой подпоследовательности принадлежит множеству $\mathfrak{D}W(\mu)$. Оба эти этапа доказательства оказываются совсем простыми, если множество характеристик участников ограничить компактным подмножеством $\mathbf{T}$ пространства $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$. Поэтому сначала мы приведём доказательство в условиях этого дополнительного предположения.

Любому $\tau_n \in \mathfrak{D}W(\mu_n)$ соответствует строго положительный вектор цен p_n $(n = 1, \ldots)$. Кроме того, каждая предельная точка p последовательности (p_n) является строго положительной. Это следует из утверждения 4 или из утверждения 6 гл. 1. Поэтому, так как $\mathbf{T}$ является компактным, существует такое компактное множество K в пространстве товаров $\mathbf{R}^l_+$, что $\varphi(t, p_n) \subset K$ для любых $n = 1, \ldots$ и $t \in \mathbf{T}$. Следовательно, каждая мера τ_n $(n = 1, \ldots)$ сосредоточена на компактном множестве $\mathbf{T} \times K$. Таким образом, согласно D.I, (30), последовательность (τ_n) относительно компактна, и, не умаляя общности, можно предположить, что $\tau_n \to \tau$ и $p_n \to p$.

Ясно, что, согласно D, (27), частное распределение на $\mathbf{T}$ есть μ. Поскольку

$$\int e d\mu_n = \int x \delta_n(dx), \ \int e d\mu_n \to e d\mu,$$

$$\int x \delta_n(dx) \to \int x \delta(dx),$$

будет получено равенство $\int e d\mu = \int x \delta(dx)$, которое и доказывает свойство (II).

Чтобы доказать соблюдение свойства (III), рассмотрим соответствие

$$p \mapsto E_p^{\mathrm{T}} := \{(t, x) \in \mathrm{T} \times \mathbf{R}^l \mid x \in \varphi(t, p)\}.$$

Из теоремы 2 гл. 1 следует, что это соответствие является компактнозначным и полунепрерывным сверху при любом $p > 0$. Пусть B_q означает множество точек из $\mathrm{T} \times \mathbf{R}^l$, расстояние от которых до компактного множества E_p^{T} не превосходит $1/q$. Поскольку соответствие $E_{(\cdot)}^{\mathrm{T}}$ является полунепрерывным сверху, для достаточно больших n мы имеем $E_{p_n}^{\mathrm{T}} \subset B_q$. По определению τ_n должно быть $\tau_n(E_{p_n}^{\mathrm{T}}) = 1$, откуда очевидно, что $\tau_n(B_q) = 1$. Согласно D.I, (26),

$$\tau(B_q) \geqq \liminf_n \tau_n(B_q),$$

так что $\tau(B_q) = 1$. Наконец, из $\bigcup\limits_{q=1}^{\infty} B_q = E_p^{\mathrm{T}}$ получаем равенство $\tau(E_p^{\mathrm{T}}) = 1$, которое и доказывает свойство (III) из определения 5.

Проведем теперь доказательство для общего случая. Сначала покажем, что последовательность (τ_n) является плотной. Для этого, согласно D, (35), достаточно показать, что плотными являются последовательности (μ_n) и (δ_n), составленные из частных распределений для (τ_n). Последовательность (μ_n) является плотной согласно D, (32) и лемме из § 1.2. Таким образом, для любого $\epsilon = 0$ существует такое компактное множество T пространства $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l$, что

$$\mu_n(\mathrm{T}) \geqq 1 - \epsilon \qquad \text{для любого } n = 1, \ldots$$

Поэтому в свою очередь существует такое компактное множество K из $\mathbf{R}^l$, что $\varphi(t, p_n) \subset K$ для любого $n = 1, \ldots$ и $t \in \mathrm{T}$. Теперь оказывается

$$\delta_n(K) = \tau_n\{(\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l) \times K\} \geqq \tau_n(\mathrm{T} \times \mathbf{R}^l) = \mu_n(\mathrm{T}) \geqq 1 - \epsilon.$$

Таким образом, здесь показано, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое компактное множество K, что $\delta_n(K) \geqq 1 - \epsilon$ для всех n, и это доказывает, что последовательность (δ_n) действительно является плотной. Поскольку последовательность (τ_n) плотная, согласно D, (31), существует сходящаяся подпоследовательность, скажем $\tau_n \to \tau$ и $p_n \to p$. Покажем, что $\tau(E_p) = 1$.

Для любого $\epsilon = 0$ найдется такое компактное множество $\mathrm{T} \subset \mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l$, что $\tau_n(\mathrm{T} \times \mathbf{R}^l) \geqq 1 - \epsilon$ для любого n. Из проведенного доказательства для частного случая следует, что $\tau(E_p) \geqq 1 - \epsilon$. Поскольку это верно для любого $\epsilon > 0$, получаем $\tau(E_p) = 1$, что и требовалось.

Приближенные равновесные цены. Как было показано (§ 1.3, утверждение 5), размеры сектора потребления порождают эффекты выпуклости среднего спроса. Поэтому можно ожидать, что в *большой* простой экономике существуют "приближенные" равновесные цены, и чем больше размеры экономики, тем точнее должно быть это приближение. Следующий факт означает, что, по существу, теорема 2 применена и к простым, но большим экономикам.

Т е о р е м а 4. *Пусть последовательность* $(\mathcal{E}_n)$ *простых экономик с характеристиками из* $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$ *является чисто конкурентной на* $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$. *Тогда для любой экономики* $\mathcal{E}_n$ *существует такой вектор цен* $p_n > 0$, *что расстояние от среднего первоначального запаса до множества среднего спроса в экономике* $\mathcal{E}_n$ *становится произвольно малым для достаточно больших* n, *т.е.*

$$\operatorname{dist}\left[\int e\,d\mu_n,\ \Phi(\mathcal{E}_n, p_n)\right] \underset{n}{\to} 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1 существует такой вектор цен $p_n > 0$, $|p_n| = 1$, что

$$\int e\,d\mu \in \operatorname{conv}\Phi(\mathcal{E}_n, p_n) \quad \text{для достаточно больших } n. \tag{1}$$

Не умаляя общности, можно предположить, что последовательность (p_n) сходится к p. Поскольку $\overset{p_n}{\mathcal{E}_n}$ обозначает потребительский сектор, соответствующий экономике $\mathcal{E}_n$ и вектору цен p_n, то функция богатства w_n определена как $w_n(a) := p_n \cdot e(\mathcal{E}_n(a))$. Поскольку последовательность $(\mathcal{E}_n)$ сходится по распределению, а последовательность (p_n) сходится к p, из D.I, (38) следует, что последовательность $(\overset{p_n}{\mathcal{E}_n})$ потребительских секторов также сходится по распределению. Поэтому можно применить утверждение 6 из § 1.3. Следовательно, из (1) и того, что $\int e\,d\mu_n \to \int e\,d\mu$, получаем $p > 0$. Теперь применим утверждение 5 из § 1.3 и получим, что для любого $\epsilon > 0$ и компактного множества $\{p, p_1, p_2, \ldots\}$ строго положительных векторов цен существует такое целое N, что

$$\operatorname{conv}\Phi(\mathcal{E}_n, p_n) \subset B_\epsilon[\Phi(\mathcal{E}_n, p_n)] \quad \text{для} \quad n \geqq N. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует

$$\operatorname{dist}\left[\int e\,d\mu,\ \Phi(\mathcal{E}_n, p_n)\right] \leqq \epsilon \quad \text{для} \quad n \geqq N.$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть* $\mathbf{T}$ – *компактное подпространство пространства* $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$. *Тогда для любых* $\epsilon > 0$ *и* $\delta > 0$ *найдется такое целое* N, *что для любой простой экономики* $\mathcal{E}: A \to \mathbf{T}$, *для которой* $|A| \geqq N$ *и* $1/(|A| \sum_A e(a)) \geqq \delta$, *существует такой вектор цен* $p > 0$, *что*

$$\operatorname{dist}\left[\int e\,d\mu,\ \Phi(\mathcal{E}, p)\right] \leqq \epsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если бы это следствие было неверным, то нашлись бы такие $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ и последовательность $\mathcal{E}_n: A_n \to \mathbf{T}$ простых экономик, что $|A| \to \infty$, $\int e\,d\mu_n \geqq \delta$, и при этом для любого $p > 0$ выполнялось бы неравенство

$$\operatorname{dist}\left[\int e\,d\mu_n,\ \Phi(\mathcal{E}_n, p)\right] < \epsilon.$$

Поскольку, однако, множество $\mathbf{T}$ компактно, множество мер на $\mathbf{T}$ также должно быть компактным (D.I, (30)). Следовательно, мы можем считать, что последовательность $(\mathcal{E}_n)$ является чисто конкурентной, что противоречит теореме 3.

"Приближенный" вектор равновесных цен в смысле теоремы 3, очевидно, не приводит в общем случае к достижимому распределению, так как средний избыточный спрос, хотя и мал, не обязательно равен нулю. В чем же тогда заключается смысл "приближенных" равновесных цен?

Множество спроса $\varphi(a, p)$ описывает векторы товаров, которые желал бы приобрести участник a, если действуют цены p. Какие товары он фактически получит на рынке – это уже другой вопрос. Поэтому значение равновесности цен p^* заключается в том, что если действуют эти цены p^*, то существует состояние экономики, при котором все участники получают желаемое. Следовательно, необходимо показать, что если действуют "приближенные" равновесные цены, то существует состояние экономики, когда желаемое получит "большинство" участников. Формально это выглядит следующим образом.

Утверждение 7. *Пусть* $(\mathcal{E}_n)$ – *чисто конкурентная последовательность экономик с характеристиками из* $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$. *Для любой экономики* $\mathcal{E}_n$ *существуют такие дележи* f_n *и вектор цен* $p_n > 0$, *что*:

(I) $\sum\limits_{a \in A_n} (f_n(a) - \mathrm{e}(\mathcal{E}_n(a))) = 0$;

(II) $p_n f_n(a) = p_n \cdot \mathrm{e}(\mathcal{E}_n(a))$ *для участника* a *из* $\mathcal{E}_n$;

(III) $\dfrac{1}{|A|} \cdot |\{a \in A_n \mid f_n(a) \notin \varphi(\mathcal{E}_n(a), p_n)\}| \to 0$;

(IV) $\max\limits_{a \in A_n} \operatorname{dist}[f_n(a), \varphi(\mathcal{E}_n(a), p_n)] \to 0$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 4 для каждого n существуют такие дележи g_n для экономики $\mathcal{E}_n$ и вектор цен $p_n > 0$, что

$$g_n(a) \in \varphi(\mathcal{E}_n(a), p_n) \qquad \text{для любого } a \in A,$$

$$\frac{1}{|A|} \sum_{a \in A_n} (g_n(a) - \mathrm{e}(\mathcal{E}_n(a))_n) \to 0.$$

Пусть

$$z_n := \sum_{A_n} (g_n - \mathrm{e} \circ \mathcal{E}_n).$$

Поскольку $p_n z_n = 0$ и $p_n > 0$, избыточный спрос z_n либо нулевой (и тогда q_n оказывается равновесием), либо имеет как положительные, так и отрицательные компоненты. Распределим теперь избыточный спрос z_n между участниками из A_n с целью получить дележ f_n, обладающий свойствами (I) и (IV). Идея дальнейшего рассуждения проста: если $z_n^h > 0$, то заберем это количество товара h у некоторых участников из A_n, а затем вернем им часть вектора $|z_n^-| := \min(0, z_n)$ таким образом, чтобы после этой компенсации их векторы потребления оказались на соответствующих бюджетных гиперплоскостях. Если забрать малое количество, то и компенсация должна быть маленькой. Проведем теперь это рассуждение в деталях.

Для любого товара h $(1 \leqq h \leqq l)$ существует такое подмножество $H_n^h \subset A_n$, что

$$\liminf_n \frac{1}{|A_n|} |\{a \in H_n^h \mid g_n^h(a) \geqslant \delta\}| > 0,$$
$$0 < \delta \leqq \frac{1}{2} \int e^h d\mu. \tag{1}$$

Далее, можно принять, что $H_n^h \cap H_n^{h'} = \phi$ для $h \neq h'$ $(n = 1, \ldots)$. Для любого h существует такое подмножество $B_n^h \subset H_n^h$, что

$$\frac{|B_n^h|}{|A_n|} \underset{n}{\to} 0, \qquad \frac{z_n^h}{|B_n^h|} \underset{n}{\to} 0 \tag{2}$$

(например, если $|B_n^h|$ – целое число, ближайшее к $(|H_n^h|, |z_n^h|)^{1/2}$).

Пусть

$$B_n := \cup \{B_n^h \mid h, \text{ где } z_n^h > 0\}.$$

Изменим теперь дележ g_n для участников из B_n, положив

$$\tilde{g}_n(a) := \begin{cases} g_n(a), & \text{если } a \notin B_n; \\ g_n(a) - \dfrac{z_n^h}{|B_n^h|} 1_h, & \text{если } a \in B_n^h \cap B_n. \end{cases}$$

Из (1) и (2) следует, что $\tilde{g}_n \geqq 0$ для достаточно больших n. Для любого участника $a \in B_n$ имеем $p_n\tilde{g}_n(a) < p_n e_n(a)$. Этим участникам будет выделено столько товаров в определяемых вектором z_n^- пропорциях, чтобы они оказались на своих бюджетных гиперплоскостях. Так полученный вектор обозначим через $f_n(a)$. Для $a \notin B_n$ положим $f_n(a) = g_n(a)$. Легко проверяется, что f_n обладает требуемыми свойствами (I) – (IV), и требуемое доказано.

Задачи

З а д а ч а 1 (обобщение утверждения 3). Пусть

$$\mathcal{E}: (A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}_{\text{Ins}} \times \mathbf{R}^l$$

– экономика обмена, для которой $e(a) \in X(a)$ почти везде в A.

Показать, что отношение среднего избыточного квазиспроса $\tilde{Z}$, действующее из Δ в $\mathbf{R}^l$:

$$\tilde{Z}(p) := \int \tilde{\varphi}(\mathcal{E}(\cdot), p) d\nu - \int e d\nu,$$

обладает следующими свойствами:

(I) $\widetilde{Z}$ является однородным нулевой степени;

(II) (закон Вальраса) для любого $p>0$ и $z \in \widetilde{Z}(p)$ выполняется $pz=0$;

(III) соответствие $\widetilde{Z}$ является компактнозначным, ограниченным снизу и полунепрерывным сверху при любом $p>0$;

(IV)* если последовательность (p_n) строго положительных векторов сходится к вектору p, который не является строго положительным, и если последовательность (z_n), $z_n \in \widetilde{Z}(p_n)$, такова, что $\lim z_n$ существует, то найдется вектор $z \in \widetilde{Z}(p)$, для которого $z \leqq \lim z_n$.

Указание. Для доказательства свойства (IV)* воспользоваться леммой Фату для пространства нескольких измерений (см. лемму 3 из D.II.4 и следствие 2 к утверждению 3 из § 1.2).

Задача 2 (обобщение леммы 1). Доказать следующий результат. Пусть Z – отношение, действующее из Δ в $\mathbf{R}^l$ и обладающее свойствами (II), (III) и (IV)* из задачи 1. Тогда существуют такие векторы $p^* \in \Delta$ и $z^* \in \operatorname{conv} Z(p^*)$, что $z^* \leqq 0$.

Указание. Как и при доказательстве леммы 1, построить последовательности (p_n) и (z_n). Показать, что последовательность (z_n) ограничена, а каждая предельная точка z^* (которая по свойству (IV)* принадлежит множеству $Z(\lim p_n)$) не превосходит нуля.

Задача 3 (обобщение теоремы 2). Установить следующий результат. Пусть

$\mathcal{E}$: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}_{\text{ens}} \times \mathbf{R}^l$

– нередуцируемая (см. задачу 2 из § 2.2) и выпуклая экономика, для которой $e(a) \in X(a)$ почти везде в A, и

$\int e d\nu \in \inf \int X d\nu$.

Тогда существует равновесие по Вальрасу со свободным распоряжением, т.е. существуют такие вектор цен $p^* \in \mathbf{R}^l$ и дележ f^*, что:

(I) $\int f^* d\nu \leqslant \int e d\nu, \quad p^* \int f^* d\nu = p^* \int e d\nu$;

(II) почти везде в $A \quad f^*(a) \in \varphi(a, p^*)$.

Указание. Использовать задачи 1 и 2 для доказательства существования p^* и f^*, которые обладают свойствами (I) и (II)$'$: почти везде в A $f^*(a) \in \widetilde{\varphi}(a, p^*)$. Затем, используя нередуцируемость $\mathcal{E}$ и предположение $\int e d\nu \in \inf \int X d\nu$, доказать равенство

$\nu\{a \in A \mid \inf p^* X(a) = pe(a)\} = 0$.

Задача 4. Из теоремы 2 следует, что для любой простой экономики

$\mathcal{E}$: $A \to \mathcal{P}^*_{\substack{\text{mo}\\ \text{co}}} \times \mathbf{R}^l_+$,

для которой $\sum\limits_A e(a) > 0$, существуют равновесные цены. Останется ли это утверждение в силе, если предпочтения будут принадлежать $\mathcal{P}_{\text{mo}}$ и обладать следующим свойством выпуклос и: для любого $z \in \mathbf{R}^l_+$ множество $\{x \in X \mid x \succ z\}$ является выпуклым?

З а д а ч а 5 (альтернативное доказательство теоремы 2). Пусть

$$\mathcal{E}: (A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}^*_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$$

— выпуклая экономика, а

$$\dot{\mathcal{E}}: (A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}^*_{\substack{\mathrm{mo}\\ \mathrm{co}}} \times \mathbf{R}^l_+$$

обозначает "овыпукленную" экономику, определяемую как

$$\dot{\mathcal{E}}(a) := (\dot{<}_{\mathcal{E}(a)}, e_{\mathcal{E}(a)})$$

(отношение $\dot{<}$ определено в § 1.2, задача 8). Поскольку $\Phi(\mathcal{E}, p) = \Phi(\dot{\mathcal{E}}, p)$ (§ 1.3, задача 1), равновесные цены для $\mathcal{E}$ существуют в том и только том случае, когда существуют равновесные цены для $\dot{\mathcal{E}}$. Пусть $\dot{\mu}$ представляет собой распределение по предпочтениям – ресурсам для $\dot{\mathcal{E}}$. Существует такая последовательность (μ_n) простых мер на $\mathcal{P}^*_{\substack{\mathrm{mo}\\ \mathrm{co}}} \times \mathbf{R}^l_+$, что $\mu_n \to \dot{\mu}$ и $\int e d\mu_n \to \int e d\dot{\mu}$. Простая мера μ_n определяет простую выпуклую экономику $A_n := \mathrm{supp}(\mu_n)$. Известно, что для $\mathcal{E}_n$ существует вектор равновесных цен p_n. Показать, что всякая предельная точка последовательности (p_n) является вектором цен равновесия для $\mathcal{E}$.

З а д а ч а 6. Привести пример двух неатомических экономик $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$, имеющих одно и то же распределение μ характеристик участников, но для которых вальрасовские дележи различны по распределению, т.е. $\mathcal{D}\mathrm{W}(\mathcal{E}) \neq$ $\neq \mathcal{D}\mathrm{W}(\mathcal{E}')$.

У к а з а н и е. Взять для всех участников из $[0, 1]$ одно и то же не являющееся строго выпуклым отношение предпочтений на $\mathbf{R}^2_+$. Пусть первоначальные ресурсы заданы как

$$e(t) = (1 + t, 1 + t) \quad \text{для } t \in [0, 1],$$

$$e'(t) = \begin{cases} (1 + 2t, \quad 1 + 2t) & \text{для } t \in [0, 1/2], \\ (2t, \quad 2t) & \text{для } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

(Каннаи, 1970)

З а д а ч а 7. Показать, что множество $\mathcal{D}\mathrm{W}(\mathcal{E})$ замкнуто для любой экономики

$$\mathcal{E}: (A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+,$$

для которой $\int e \cdot \mathcal{E} d\nu > 0$ и которая обладает следующим свойством: условные вероятности $\nu^{\mathcal{C}}$ на $(A, \mathcal{A})$ существуют и являются неатомическими, где σ-алгебра условий есть $\mathcal{C} = \mathcal{E}^{-1}\{\mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+)\}$.

З а д а ч а 8 (уточнение следствия к теореме 4). Пусть T – компактное подпространство пространства $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$. Установить следующий результат. Для любого $\delta > 0$ существует такое ограниченное множество $D \subset \mathbf{R}^l$, что для любой простой экономики $\mathcal{E}: A \to \mathrm{T}$, где $(1/|A|) \sum_A e \geqq \delta$, найдется такой вектор цен $p > 0$, что избыточный спрос $\sum_A |\varphi(a, p) - e(a)|$ содержится в D (Гильденбранд, Шмайдлер, Замир, 1974).

З а д а ч а 9 (случайные предпочтения). *Случайное* отношение предпочтения определяется как случайный элемент метрического пространства $\mathcal{P}$, т.е. как измеримое отображение вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ в пространство $\mathcal{P}$. Участник экономики со случайными предпочтениями и случайным первоначальным ресурсом определяется измеримым отображением α вероятностного пространства в $\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$.

Случайная экономика представляет собой конечное семейство $\{\alpha_a\}_{a \in A}$ участников экономики со случайными предпочтениями и случайными первоначальными ресурсами.

Установить следующий результат. Пусть $\mathcal{E}_n = \{\alpha_a^n\}_{a \in A_n}$ – такая последовательность случайных экономик, что:

(α) $|A_n| \underset{n}{\to} \infty$;

(β) для любого n семейство $\{\alpha_a^n\}_{a \in A_n}$ является стохастически независимым;

(γ) для любых n и $a \in A_n$ распределение α_a^n концентрируется на $\mathcal{P}^*_{\substack{\mathrm{mo}\\ \mathrm{sco}}} \times K$, где K – компактное подмножество в $\mathbf{R}^l_+$, а множество всех распределений α_a^n является слабо относительно компактным.

Тогда для каждой экономики $\mathcal{E}_n$ существует такой вектор цен $p_n > 0$, что:

(1) ожидаемый средний избыточный спрос экономик $\mathcal{E}_n$ относительно p_n равен нулю, т.е. $\int_\Omega Z(\mathcal{E}_n, p_n)\, dP = 0$;

(2) случайный средний избыточный спрос экономик $\mathcal{E}_n$ относительно p_n сходится по вероятности к нулю, т.е. для любого $\delta > 0$

$$P\{\omega \in \Omega \,|\, |Z(\mathcal{E}_m(\omega), p_n)| \leqq \delta\}_{n \to \infty} \to 1.$$

Указание.

$$Z(\mathcal{E}_n(\omega), p_n) = \frac{1}{|A_n|} \sum_{a \in A_n} (\varphi(\alpha_a^n(\omega), p_n) - \mathbf{e}(\alpha_a^n(\omega))).$$

(1) Заменить каждого случайного участника его функцией ожидаемого спроса и первоначальным ресурсом.

(2) Воспользоваться законом больших чисел (см., Лоев, 1963, с. 317; Гильденбранд, 1971).

Примечания к § 2.2

Проблема существования равновесных цен для экономик обмена была сформулирована Вальрасом (1874, лекция 7). Разумеется, он не мог доказать существование равновесия в то время (теорема Брауэра о неподвижной точке была опубликована только в 1909 г.). Обычно ссылаются на доказательство существования равновесных цен для простой выпуклой экономики, данное Дебре в его книге "Теория стоимости". Существование равновесных цен для выпуклой простой экономики доказывалось с различной общностью и в рамках различных предположений Вальдом (1935, 1936), Эрроу и Дебре (1954), Мак-Кензи (1954, 1955, 1959), Гейлом (1955), Дебре (1952, 1956, 1959, 1962, 1970), Никайдо (1956, 1968) и Эрроу и Ханом (1971). Наиболее общее рассуждение содержится в статье Дебре (1962).

Для бесконечномерного пространства товаров (L_∞ с топологией Маккея $\tau(L_\infty, L_1)$) существование равновесных цен для простой экономики было установлено Бьюли (1972). Прямое доказательство (т.е. не использующее включения $W(\mathcal{E}) \subset C(\mathcal{E})$) существования распределений в *с*-ядре выпуклой простой экономики было дано Скарфом (1967); см. также Шепли (1972a). Первое доказательство существования равновесных цен для неатомических экономик получил Ауманн (1966). Его доказательство отличается от доказательства, приведенного в этой книге. Альтернативное доказательство, не использующее свойство полноты предпочтений, было дано Шмайдлером (1969). Доказательство без предположения о монотонности предпочтений можно найти у Гильденбранда (1970b, 1972). Существование "приближеного" равновесия для больших экономик без предположения о выпуклости предпочтений впервые было изучено Старром (1969); см. также Эрроу, Хан (1971). Старр ввел в обращение важную теорему Шепли–Фолкмена [гл. CI, (6)].

Утверждение 7 основано на результатах Гильденбранда, Шмайдлера и Замира (1974).

§ 2.3. Приложение*): конечность $\Pi(\mathcal{E})$ и непрерывность Π

Участник экономики описывается функцией спроса и вектором первоначальных ресурсов. Экономика обмена описывается мерой μ на $\mathcal{D} \times \mathbf{R}^l_+$, где $\mathcal{D}$ – метрическое пространство функций спроса. Показывается, что для "большинства" экономик μ множество $\Pi(\mu)$ векторов цен равновесия конечно и зависит от меры μ непрерывно.

Введение. В предшествующих параграфах было выяснено, при каких условиях множество векторов равновесных цен $\Pi(\mathcal{E})$ экономики $\mathcal{E}$ непусто и зависит полунепрерывно сверху от распределения по предпочтениям – ресурсам. Подчеркнем, что в рамках предыдущего рассмотрения невозможно было показать, что множество $\Pi(\mathcal{E})$ "мало" (например, конечно) и непрерывно зависит от определяющих его параметров. Такое отсутствие определенности, очевидно, требует проведения дальнейших исследований.

Поскольку, как показывают простые примеры, на единственность надежды нет, лучшее, чего можно ожидать, это конечность множества $\Pi(\mathcal{E})$. В этом случае, очевидно, желательно, чтобы соответствие Π было непрерывным (полунепрерывным сверху и снизу) и чтобы число $|\Pi|$ векторов равновесных цен было локально постоянным.

Желательные свойства Π получаются при использовании результатов дифференциальной топологии. Чтобы показать преимущества такого подхода, мы сосредоточимся на простом случае. В качестве исходного понятия оказывается удобным выбрать не предпочтения, а функции спроса. Таким образом, участник экономики будет описываться функцией спроса и вектором первоначальных ресурсов.

Функции спроса.

Определение 6. Непрерывная функция f из $S \times (0, \infty)$ в $\mathbf{R}^l_+$, где $S := \{p \in \mathbf{R}^l \mid \Sigma p_j = 1, p > 0\}$ обозначает симплекс положительных цен, называется *функцией спроса*, если:

---

*) Это приложение написано Куртом Гильденбрандом.

(I) $p \cdot f(p, w) = w$ для любого $(p, w) \in S \times (0, \infty)$;

(II) для любой сходящейся последовательности (p^n, w^n) из $S \times (0, \infty)$, предел которой принадлежит множеству*) $(\Delta \backslash S) \times (0, \infty)$, норма**) $|f(p^n, n^n)|$ стремится к бесконечности (желательность всех товаров).

Мы будем рассматривать дифференцируемые функции спроса. Поэтому для нас желательно, чтобы функции спроса были определены на открытом множестве, в связи с чем мы отождествляем симплекс положительных цен с множеством

$$\left\{p \in \mathbf{R}^{l-1} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{l-1} p_j < 1,\ p > 0\right\}.$$

Теперь можно понимать $S \times (0, \infty)$ как открытое подмножество пространства $\mathbf{R}^l$, причем *производная* $\mathcal{D} f(p, w)$ непрерывно дифференцируемой функции спроса f в точке (p, w) задается $l \times l$-матрицей *частных производных*, т.е. частных производных каждой из l компонент f_j функции f по переменным $p_1, \ldots, p_{l-1}$ и w. Обозначим через $\mathcal{D}$ множество всех *непрерывно дифференцируемых* функций спроса и определим на $\mathcal{D}$ метрику d, положив

$$d(f, g) := \sum_{n=l}^{\infty} 2^{-n} \{ \sup_{(p,w) \in S \times [1/n, n]} \bar{\delta}(f(p, w), g(p, w)) +$$

$$+ \sup_{(p,w) \in \Delta_n \times [1/n, n]} \delta(Df(p, w), Dg(p, w))\},$$

где δ – произвольная метрика, порождающая обычную топологию на $\mathbf{R}^{l \times l}$, причем $\delta \leqq 1$, а $\bar{\delta}$ – произвольная метрика, порождающая одноточечную компактификацию пространства $\mathbf{R}^l$, причем $\bar{\delta} \leqq 1$, и

$$\Delta_n := \left\{p \in \mathbf{R}^l \mid \Sigma p_j = 1,\ p_j \geqq \frac{1}{n}\right\}.$$

Легко показать, что последовательность (f^n) элементов множества $\mathcal{D}$ сходится к $f \in \mathcal{D}$ по метрике d в том и только том случае, когда выполнены следующие три условия:

(α) f^n равномерно сходится к f на компактных подмножествах множества $S \times (0, \infty)$;

(β) Df^n равномерно сходится к Df на компактных подмножествах множества $S \times (0, \infty)$;

(γ) если (p^n, w^n) – сходящаяся последовательность в $S \times (0, \infty)$, предел которой принадлежит $(\Delta \backslash S) \times (0, \infty)$, то $|f^n(p^n, w^n)|$ стремится к бесконечности.

Если $\precsim$ есть транзитивное, монотонное и строго выпуклое отношение нестрогого предпочтения, т.е. $\precsim \in \mathscr{P}^*_{\substack{\text{mo}\\ \text{sco}}}$, то соответствие спроса $\varphi(\precsim, p, w)$, $(p, w) \in S \times (0, \infty)$, является функцией спроса. Более того, если $(\precsim_n)$ – сходящаяся последовательность элементов из $\mathscr{P}^*_{\substack{\text{mo}\\ \text{sco}}}$, пределом которой является $\precsim \in \mathscr{P}^*_{\substack{\text{mo}\\ \text{sco}}}$, то последовательность $(\varphi(\precsim_n, \cdot, \cdot))$ функций

*) Δ обозначает замыкание S, т.е. $\Delta := \{p \in \mathbf{R}^2 \mid \Sigma p_j = 1, p \geqq 0\}$.

**) $|\cdot|$ обозначает произвольную норму, присущую обычной топологии в $\mathbf{R}^l$.

спроса сходится к функции спроса $\varphi(\precsim, \cdot, \cdot)$ в смысле условий (α) и (γ). Это следует из теоремы 2 и следствия 1 к утверждению 3 из § 1.2.

Пусть $T = \mathcal{K} \times [\alpha, \beta]^l$, где $\mathcal{K}$ – компактное подмножество множества $\mathcal{D}$ и $0 < \alpha < \beta < \infty$. Обозначим через $\mathcal{M}_T$ множество вероятностных мер на $(T, \mathcal{B}(T))$. Мера μ из $\mathcal{M}_T$ называется *экономикой*. Снабдим множество $\mathcal{M}_T$ топологией слабой сходимости. Тогда его можно будет считать компактным метрическим пространством (D.I, (30))..

Определим функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{e}$, полагая соответственно $\mathbf{f}((f, e), p) = f(p, p \cdot e)$ и $\mathbf{e}(f, e) = e$, где $(f, e) \in T$, $p \in S$. Очевидно, что функции $\mathbf{f}(\cdot, p)$ и $\mathbf{e}$ ограничены и непрерывны на компактном множестве T и поэтому являются μ-интегрируемыми для любого $\mu \in \mathcal{M}_T$.

Определение 7. Для экономики $\mu \in \mathcal{M}_T$ множество *векторов равновесных цен* $\Pi(\mu)$ определяется как

$$\Pi(\mu) := \{p \in S \mid \int \mathbf{f}(\cdot, p)\, d\mu = \int \mathbf{e}\, d\mu\}.$$

Регулярные экономики.

Определение 8. Экономика $\mu \in \mathcal{M}_T$ называется *регулярной*, если она обладает следующим свойством: множество $\Pi(\mu)$ является конечным и существуют окрестность U экономики μ в $\mathcal{M}$ и $|\Pi(\mu)| := m$ таких непрерывных функций g_n, действующих из U в S, что

$$\Pi(\mu') = \{g_1(\mu'), \ldots, g_m(\mu')\} \quad \text{для каждого} \quad \mu' \in U.$$

Теорема 5. *Множество всех регулярных экономик является открытым и плотным подмножеством в* $\mathcal{M}_T$.

При доказательстве этой теоремы мы будем использовать следующее утверждение.

Утверждение 8. *Для любой экономики* $\mu \in \mathcal{M}_T$ *множество векторов равновесных цен* $\Pi(\mu)$ *является непустым компактным подмножеством симплекса положительных цен* S, *и соответствие* Π, *действующее из* $\mathcal{M}_T$ *в* S, *полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Сначала покажем, что функция среднего избыточного спроса Z, отражающая $\mathcal{M}_T \times S$ в $\mathbf{R}^l$ и определенная как

$$Z(\mu, p) := \int (\mathbf{f}(\cdot, p) - \mathbf{e})\, d\mu,$$

обладает следующими свойствами:

(1) Z непрерывна и ограничена снизу;

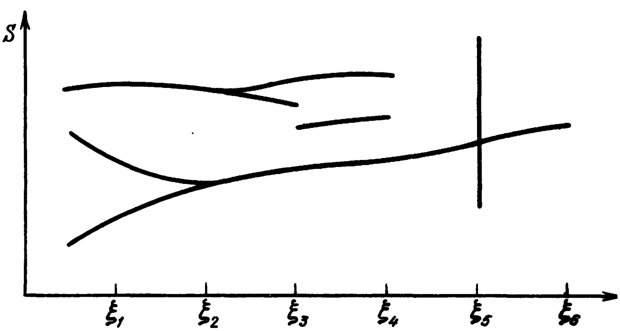

Рис. 2.5. Граф соответствия Π. Экономика ξ_1 регулярна; $\xi_2, \ldots, \xi_5$ не регулярны

(2) $p \cdot Z(\mu, p) = 0$ для любых $(\mu, p) \in \mathcal{M}_T \times S$ (закон Вальраса);

(3) если (μ_n, p^n) – сходящаяся последовательность с элементами из $\mathcal{M}_T \times S$, предел которой $(\mu, p) \in \mathcal{M}_T \times (\Delta \setminus S)$, то $\lim |Z(\mu_n, p^n)| = \infty$.

Поскольку функция $\mathbf{f}$ – е непрерывна на компактном множестве $T \times \Delta_n$, функция Z непрерывна на $\mathcal{M}_T \times \Delta_n$ (D.I, (38)). Каждый вектор $p \in S$ является внутренней точкой для некоторого Δ_n; следовательно, функция Z непрерывна на $\mathcal{M}_T \times S$. Мы имеем также неравенство $Z(\mu, p) \geqq -\int \mathbf{e}\, d\mu \geqq -(\beta, \ldots, \beta)$, т.е. функция Z ограничена снизу. Очевидно, что из свойства (I) функций спроса следует (2). Наконец, из свойства (II) функций спроса и определения множества T следует, что

$$\lim_n \{ \inf_{(f, e) \in T} |f(p^n, p^n e)| \} = \infty,$$

и это доказывает (3).

Теперь мы можем применить лемму 1 из § 2.2. Таким образом,

(4) $\Pi(\mu) \neq \phi$ для любого $\mu \in \mathcal{M}_T$.

Для доказательства того, что соответствие Π является компактнозначным и полунепрерывном сверху, необходимо показать (теорема 1, B.III):

(5) если (μ_n) – сходящаяся последовательность элементов из $\mathcal{M}_T$ с пределом $\mu \in \mathcal{M}_T$ и если $p^n \in \Pi(\mu_n)$, то существует сходящаяся подпоследовательность (p^{n_k}) последовательности (p^n), для которой $\lim_k p^{n_k} \in \Pi(\mu)$.

Поскольку (p^n) содержится в компактном множестве Δ, существует сходящаяся подпоследовательность с пределом $p \in \Delta$. В силу (3) мы имеем $p \in S$. Тогда из (1) следует, что $p \in \Pi(\mu)$.

Доказательство теоремы 5. То, что множество регулярных экономик открыто, следует непосредственно из определения. Для доказательства его плотности определим некоторое подмножество $\mathcal{R}$ множества $\mathcal{M}_T$. Затем мы покажем, что $\mathcal{R}$ содержит только регулярные экономики и что $\mathcal{R}$ плотно в $\mathcal{M}_T$.

Применяя общий вариант правила Лейбница дифференцирования интеграла, зависящего от параметра (см. конец доказательства), мы получаем дифференцируемость функции $Z(\mu, \cdot)$. Производная $D_2 Z(\mu, p)$ функции $Z(\mu, \cdot)$ в точке $p \in S$ равна $\int D_2 \mathbf{f}(\cdot, p)\, d\mu$, где $D_2 \mathbf{f}((f, e), p)$ означает производную функции $\mathbf{f}((f, e), \cdot)$ в точке $p \in S$. Из (D.I, (38)) следует, что $D_2 Z(\mu, p)$ непрерывно зависит от $(\mu, p) \in \mathcal{M}_T \times S$. Пусть

$\mathcal{R} := \{\mu \in \mathcal{M}_T \mid D_2 Z(\mu, p)$ имеет максимальный ранг для любого $p \in \Pi(\mu)\}$

Покажем теперь, что

(6) $\mathcal{R}$ содержит только регулярные экономики.

Пусть $\mu \in \mathcal{R}$ и $p \in \Pi(\mu)$. Существует такое j, что $\det D_2 \hat{Z}(\mu, p) \neq 0$, где $\hat{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_{j-1}, Z_{j+1}, \ldots, Z_l\}$. Применяя теорему о неявной функции (см. конец доказательства), получаем, что существуют такие окрестности $\mathcal{O}_p$ точки μ в $\mathcal{M}_T$ и U_p точки p в S и непрерывная функция g, отображающая $\mathcal{O}_p$ в U_p, что

$$\{p' \in U_p \mid \hat{Z}(\mu', p') = 0\} = \{g(\mu')\} \quad \text{для любого } \mu' \in \mathcal{O}_p.$$

Из (2) следует, что $\Pi(\mu') \cap U_p = \{g(\mu')\}$ для любого $\mu' \in \mathcal{O}_p$. Компактное множество $\Pi(\mu)$ можно покрыть конечным числом множеств U_p, $p \in \Pi(\mu)$. Поэтому $\Pi(\mu)$ является конечным. Положим для определенности $\Pi(\mu) = \{p^1, \ldots, p^m\}$. Таким же способом доказывается существование окрестностей $\mathcal{O}_{p^i}$ точки μ в $\mathcal{M}_T$ и U_{p^i} точек p_i в S и m таких непрерывных функций g_{p^i}, отражающих $\mathcal{O}_{p^i}$ в U_{p^i}, что

$$\Pi(\mu') \cap U_{p^i} = \{g_{p^i}(\mu')\} \text{ для любого } \mu' \in \mathcal{O}_{p^i}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Поскольку соответствие Π является полунепрерывным сверху, существует такая окрестность $\mathcal{O} \subset \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{p^i}$ точки μ в $\mathcal{M}_T$, что $\Pi(\mu') \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{p^i}$, т.е. $\Pi(\mu') = \{g_{p^1}(\mu'), \ldots, g_{p^m}(\mu')\}$ для любого $\mu \in \mathcal{O}$. Следовательно, μ является регулярной экономикой.

Для завершения доказательства теоремы необходимо показать, что множество $\mathcal{R}$ является плотным в $\mathcal{M}_T$. Определим подмножество

$$\mathcal{M}'_T := \{\mu \in \mathcal{M}_T \mid \operatorname{supp}(\mu) \text{ является компактным подмножеством множества } \mathcal{K} \times (\alpha, \beta)^l\}$$

множества $\mathcal{M}_T$. Нетрудно показать, что $\mathcal{M}'_T$ плотно в $\mathcal{M}_T$. Поэтому остается доказать, что $\mathcal{R} \cap \mathcal{M}_T$ плотно в $\mathcal{M}'_T$. Выберем произвольно $\mu \in \mathcal{M}'_T$ и определим отображение F_μ из $S \times (0, \infty)$ в $\mathbf{R}^l$, полагая

$$F_\mu(p, w) := \int \{f(p, p \cdot e + w) - e\} \, d\mu(f, e).$$

Пусть h_x $(x \in \mathbf{R}^l)$ обозначает отображение из $\mathcal{D} \times \mathbf{R}^l$ в $\mathcal{D} \times \mathbf{R}^l$, определяемое как $h_x(f, e) := (f, e + x)$. Мы утверждаем, что

$$(7) \quad \{(p, p \cdot x) \mid p \in \Pi(\mu \circ h_x^{-1})\} \subset F_\mu^{-1}(x), \quad x \in (0, \infty)^l.$$

Действительно, после замены переменных имеем

$$\int \{f(p, p \cdot e) - e\} \, d\mu \circ h_x^{-1}(f, e) =$$
$$= \int \{f(p, p \cdot (e + x)) - (e + x)\} \, d\mu(f, e),$$

т.е.

$$(8) \quad Z(\mu \circ h_x^{-1}, p) = F_\mu(p, p \cdot x) - x, \ p \in S, \ x \in (0, \infty)^l.$$

Непрерывная дифференцируемость F_μ доказывается точно так же, как мы доказали существование производной $D_2 Z(\mu, p)$ и ее непрерывную зависимость от $(\mu, p) \in \mathcal{M}_T \times S$.

Производная $DF_\mu(p, w)$ функции F_μ в точке (p, w) представляет собой $l \times l$-матрицу, где первые $l - 1$ столбцов состоят из частных производных по переменным $(p_1, \ldots, p_{l-1})$ и обозначаются $D_1 F_\mu(p, w)$, а l-й столбец состоит из частных производных по переменной w и обозначается $D_2 F_\mu(p, w)$. Из (8) следует, что

$$D_2 Z(\mu \circ h_x^{-1}, p) = D_1 F_\mu(p, px) + (s_1, \ldots, s_{l-1}),$$

где s_j обозначает вектор-столбец $(x_j - x_l) \cdot D_2 F_\mu(p, p \cdot x)$.

Следовательно,

(9) если $DF_\mu(p, px)$ имеет максимальный ранг l, то $D_2 Z(\mu \circ h_x^{-1}, p)$ имеет максимальный ранг $l - 1$.

Применяя теорему Сарда (см. конец доказательства) к функции F_μ, получаем существование последовательности $(x_n) \subset (0, \infty)^l$, для которой $\lim_n x_n = 0$ и $DF_\mu(p, w)$ имеет максимальный ранг для любого $(p, w) \in F^{-1}(x_n)$ $(n = 1, \ldots)$. Очевидно, что $\lim \mu \circ h_{x_n}^{-1} = \mu$ и $\mu \circ h_{x_n}^{-1} \in \mathcal{M}'_T$ для достаточно больших n. Из (7) и (9) следует, что $D_2 Z(\mu \circ h_{x_n}^{-1}, p)$ имеет максимальный ранг для любого $p \in \Pi(\mu \circ h_{x_n}^{-1})$, т.е. $\mu \circ h_{x_n}^{-1} \in \mathcal{R}$. Требуемое доказано.

Правило Лейбница для дифференцирования интеграла, зависящего от параметра (Л. Шварц, 1967, разд. IV.11, теорема 115):

Пусть T – компактное метрическое пространство, а μ – вероятностная мера на $(T, \mathcal{B}(T))$. Пусть, далее, S – открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$, а h – такая непрерывная функция из $T \times S$ в $\mathbf{R}^m$, что функция $h(t, \cdot)$ дифференцируема при любом $t \in T$, а ее производная в точке $x \in S$, обозначенная $D_2 h(t, x)$, непрерывно зависит от $(t, x) \in T \times S$. Тогда функция H из S в $\mathbf{R}^n$, определенная как

$$H(x) := \int h(\cdot, x)\, d\mu, \quad x \in S,$$

является непрерывно дифференцируемой, и ее производная DH задается как

$$DH(x) = \int D_2 h(\cdot, x)\, d\mu, \quad x \in S.$$

Теорема о неявной функции (Л. Шварц, 1967, разд. III.8, теорема 25): *Пусть M – метрическое пространство, S – открытое подмножество $\mathbf{R}^n$ и Ξ – такая непрерывная функция из $M \times S$ в $\mathbf{R}^n$, что частное отображение $\Xi(\mu, \cdot)$ дифференцируемо при любом $\mu \in M$, а производная $D_2 \Xi(\mu, p)$ отображения $\Xi(\mu, \cdot)$ в точке p непрерывно зависит от $(\mu, p) \in M \times S$. Пусть также $(\mu_0, p_0) \in M \times S$, причем $\Xi(\mu_0, p_0) = 0$ и $\det D_2 \Xi(\mu_0, p_0) \neq 0$. Тогда существуют такие окрестности $\mathcal{O}$ точки μ_0 в M и U точки p_0 в S и такая непрерывная функция g, отображающая $\mathcal{O}$ в U, что $\Xi(\mu, g(\mu)) = 0$ для любого $\mu \in \mathcal{O}$; кроме того, функция g является единственной, т.е.*

$$|\{p \in U \mid \Xi(\mu, p) = 0\}| = 1 \quad \text{для любого} \quad \mu \in \mathcal{O}.$$

Теорема Сарда (А. Сард, 1942). *Пусть S – открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$, а F – непрерывно дифференцируемая функция из S в $\mathbf{R}^n$. Тогда лебеговская мера множества точек $y \in \mathbf{R}^n$, для которых хотя бы для одного $x \in F^{-1}(y)$ ранг матрицы Якоби $DF(x)$ функции F в точке x не является максимальным, равняется нулю.*

Примечания к § 2.3

Методы дифференциальной топологии (теорема Сарда) при анализе равновесия впервые использовал Дебре (1970). Дебре рассматривал пространство экономик с постоянным числом участников, функции спроса которых фиксированы, а первоначальные ресурсы переменные. Он показал, что множество экономик, имеющих бесконечно много состояний равновесия, содержится в замкнутом множестве лебеговой меры нуль. Далее, он показал, что вне этого исключительного множества каждая экономика имеет конечное число равновесий, которые непрерывно зависят от первоначальных ресурсов.

Обобщения и видоизменения результатов Дебре содержатся в работах Делбена (1971), Е. Диркера (1972), Е. Диркера и Н. Диркера (1972), Фукса (1974), К. Гильденбранда (1972), Митягина (1972) и Смейла (1972, 1973, 1974). Обзор по этой теме можно найти у Дебре (1972) и Диркера (1974).

ГЛАВА 3

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О C-ЯДРЕ

§ 3.1. Введение

В теореме 1 гл. 2 показано, что каждый дележ f из c-ядра неатомической экономики обмена $\mathcal{E}$ можно реализовать "децентрализованным образом" с помощью подходящего вектора цен p; иными словами, вектор товаров $f(a)$, который потребляется участником a в соответствии с дележом f из c-ядра, принадлежит множеству спроса $\varphi(a, p)$. Таким образом, в системе цен p любой другой вектор товаров, более предпочтительный для участника a, чем $f(a)$, будет превосходить по цене его доход $p \cdot e(a)$.

В этой главе мы хотим показать, что в простой экономике обмена с "достаточно большим" числом участников каждый дележ в c-ядре можно "приближенно" с помощью подходящей системы цен реализовать децентрализованным образом. При этом, чем больше в экономике участников, тем эта аппроксимация будет точнее. Такое утверждение пока представляется достаточно расплывчатым; однако с помощью уже развитых понятий ему легко придать точный смысл.

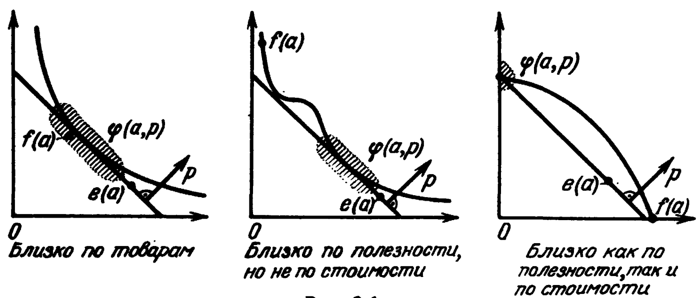

Рис. 3.1

Мы рассмотрим чисто конкурентную последовательность $(\mathcal{E}_n)$ простых экономик и покажем, что для каждого дележа f из c-ядра $\mathcal{E}_n$ существует такой вектор цен p, что для каждого участника (теорема 2) или хотя бы для "большинства" участников (теорема 1) вектор товаров $f(a)$ участника a будет сколь угодно "близок" к его множеству спроса $\varphi(a, p)$ при достаточно большом n (т.е. если экономика $\mathcal{E}_n$ достаточно конкурентна).

Термин "близость" в этом контексте может пониматься в нескольких смыслах: это может быть близость в пространстве товаров $\mathbf{R}^l$, близость по стоимости в ценах p либо же, наконец, близость по полезности по отнощению к данной функции полезности. Эти понятия близости иллюстрируются на рис. 3.1.

Очевидно, близость в пространстве товаров является наиболее сильным и наиболее желательным понятием близости дележа $f(a)$ к множеству спроса $\varphi(a, p)$. Однако в ходе доказательства предельной теоремы в терминах этого понятия близости встречается принципиальное затруднение, состоящее в том, что если дан вектор цен $\bar{p}$, то множество спроса $\varphi(\succ, \bar{p} \cdot e, \bar{p})$ не является, вообще говоря, полунепрерывным снизу по аргументам $(\succ, e) \in \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$. Как мы увидим далее, существует несколько более или менее искусственных способов преодолеть отсутствие этой непрерывности. Пока же мы хотим избежать этого чисто формального момента и сконцентрировать свое внимание на существе дела. Поэтому в первой части этой главы мы будем предполагать, что предпочтения являются строго выпуклыми. В этом случае для простой, но "большой" экономики теорема 1 вместе с ее следствиями, а также теорема 2 дают удовлетворительное представление о связи между c-ядром и множеством вальрасовских дележей.

В конце этой главы мы обсудим те трудности, которые возникают при попытке опустить предположение о строгой выпуклости предпочтений, и установим предельную теорему, аналогичную теореме 1.

§ 3.2. Предельные теоремы для случая строго выпуклых предпочтений

В этом параграфе мы будем рассматривать чисто конкурентную последовательность $(\mathcal{E}_n)$ простых экономик, участники которых обладают характеристиками из множества T; предполагается, что $T \subset \mathcal{P}^*_{\substack{\mathrm{mo}\\ \mathrm{sco}}} \times \mathbf{R}^l_+$. Иначе говоря, если μ_n обозначает меру на T в экономике $\mathcal{E}_n$, то последовательность (μ_n) слабо сходится к мере μ на T, средние ресурсы сходятся, т.е. $\int \mathbf{e}\, d\mu_n \to \int \mathbf{e}\, d\mu$, и, наконец, предполагается, что $\int \mathbf{e}\, d\mu > 0$.

Пусть $\mathcal{E}$: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to T$ – некоторая экономика с мерой μ на пространстве предпочтений – ресурсов. Тогда, как уже известно, множество $\Pi(\mathcal{E})$ равновесных цен непусто (см. гл. 2, теорема 2) и зависит только от меры μ (см. гл. 1, утверждение 4). Поэтому вместо $\Pi(\mathcal{E})$ мы будем писать $\Pi(\mu)$.

Следующий результат показывает, что если n достаточно велико, то равновесные цены "предельной экономики", определяемые предельной мерой μ, приближенно децентрализуют дележи из c-ядра $\mathcal{E}_n$.

Теорема 1. *Пусть последовательность* $(\mathcal{E}_n)$ *простых экономик*

$$\mathcal{E}_n: A_n \to \mathcal{P}^*_{\substack{\mathrm{mo}\\ \mathrm{sco}}} \times \mathbf{R}^l_+$$

является чисто конкурентной на $\mathcal{P}^*_{\substack{\mathrm{mo}\\ \mathrm{sco}}} \times \mathbf{R}^l_+$. *Тогда*:

(I) *для любых* $\epsilon > 0$ *и* $\eta > 0$ *существует такое целое число* $\bar{n}$, *что для каждого* $n \geqq \bar{n}$ *и для каждого дележа* $f \in \mathrm{C}(\mathcal{E}_n)$ *существует вектор цен* $p \in \Pi(\mu)$, *обладающий свойством*

$$\frac{1}{|A_n|} \,|\{a \in A_n \mid |f(a) - \varphi(\mathcal{E}_n(a), p)| \geqq \eta\}| \leqq \epsilon,$$

или, что то же самое,

(II) *для любого дележа* $f_n \in \mathbf{C}(\mathcal{E}_n)$ *существует такой вектор цен* $p_n \in \Pi(\mu)$, *что последовательность* $(f_n(\cdot) - \varphi(\mathcal{E}_n(\cdot), p_n))$ *сходится по мере к нулю, т.е. для каждого* $\eta > 0$

$$\frac{1}{|A_n|} | \{ a \in A_n \mid | f_n(a) - \varphi(\mathcal{E}_n(a), p_n) | \geqq \eta \} | \to 0.$$

Замечание. Подчеркнем, что вектор цен p_n принадлежит $\Pi(\mu)$; вообще говоря, нельзя выбрать p_n из $\Pi(\mu_n)$, т.е. вектор p_n не обязательно является равновесным вектором цен в экономике $\mathcal{E}_n$. Конечно, если равновесное отображение $\Pi(\cdot)$ непрерывно в смысле μ, то выбор p_n из $\Pi(\mu_n)$ становится возможным (см. задачу 9).

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются два результата, которые устанавливаются раздельно, – лемма 1 и утверждение 1. Два других доказательства теоремы 1 (первое из которых основано только на лемме 1 и не использует утверждения 1, а второе – только на утверждении 1 и не использует леммы 1) намечены в задачах 1 и 2.

Лемма 1. *Для любой простой экономики* $\mathcal{E}: A \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$, *для любого дележа* $f \in \mathbf{C}(\mathcal{E})$ *и произвольных* $\tau > 0$ *и* $\epsilon > 0$ *существует такой вектор* $p \in \mathbf{R}^l$, *что*

$$\left| \left\{ a \in A \;\middle|\; \begin{array}{l} e_a \in B_\tau \text{ и существует такой } x \in B_\tau, \text{ что } p \cdot x \leqq p \cdot e_a, \\ B_\epsilon(x) \subset \mathbf{R}^l_+ \text{ и } B_\epsilon(x) \succ_a f_a \end{array} \right\} \right| \leqq \left(\frac{2\tau}{\epsilon}\right)^2$$

Здесь $B_\tau := B_\tau(0)$, *а* $B_\epsilon(x)$ *– шар в евклидовом пространстве.*

Лемма 1 является основным инструментом доказательства предельных теорем в этой главе. Эта лемма утверждает, что с каждым дележом из c-ядра экономики $\mathcal{E}$ можно связать такой вектор цен p, что число участников экономики, которых эта система цен p делает "весьма бедными" – в том смысле, что эти участники могли бы (в пределах B_τ) получить нечто лучшее (из шара $B_\epsilon(x)$), – ограничено сверху величиной, которая не зависит от общего числа участников экономики.

Доказательство. Предположим противное: существуют такие экономика $\mathcal{E}: A \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$, дележ $f \in \mathbf{C}(\mathcal{E})$ и числа $\tau > 0$ и $\epsilon > 0$, что для каждого $p \in \mathbf{R}^l$

$$\left| \left\{ a \in A \;\middle|\; \begin{array}{l} e_a \in B_\tau \text{ и существует такой } x \in B_\tau, \text{ что } p \cdot x \leqq p \cdot e_a, \\ B_\epsilon(x) \subset \mathbf{R}^l_+ \text{ и } B_\epsilon(x) \succ_a f_a \end{array} \right\} \right| > \left(\frac{2\tau}{\epsilon}\right)^2. \tag{1}$$

Пусть $q \geqq 1$ – наименьшее целое, не меньшее, чем $(2\tau/\epsilon)^2$. Из (1) очевидно, что имеются участник $a \in A$ (например, $a = 1$) и вектор $x_1 \in B_\tau$, для которых $e_1 \in B_\tau$ и $B_\epsilon(x_1) \subset \mathbf{R}^l_+$, $B_\epsilon(x_1) \succ_1 f_1$. Если $q > 1$, то мы применим свойство (1) к вектору $p = x_1 - e_1$. Поэтому в $\mathcal{E}$ имеются такие участник, отличный от 1 (например, 2), и вектор $x_2 \in B_\tau$, что $e_2 \in B_\tau$, $(x_1 - e_1) \cdot (x_2 - e_2) \leqq$ $\leqq 0$. $B_\epsilon(x_2) \subset \mathbf{R}^l_+$ и $B_\epsilon(x_2) \succ_2 f_2$. Если $q > 2$, то мы применим свойство (1) к вектору $(x_1 - e_1) + (x_2 - e_2)$ и т.д.

Таким образом, мы получим q различных участников $1, \ldots, q$ в $\mathcal{E}$, а для каждого участника i вектор x_i, которые обладают следующими свойствами:

$$e_i \in B_\tau, \ \ x_i \in B_\tau, \ \ i = 1, \ldots, q, \tag{2}$$

$$B_\epsilon(x_i) \subset \mathbf{R}^l_+, \ \ B_\epsilon(x_i) \succ_i f_i, \ \ i = 1, \ldots, q, \tag{3}$$

$$z_i \cdot \sum_{n=1}^{i-1} z_n \leqq 0 \text{ для } q \leqq i \leqq q, \text{ где } z_i = x_i - e_i. \tag{4}$$

Обозначим через $\bar{z} := \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{1} z_i$ чистый средний торговый оборот. Мы имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{q} z_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{q} z_i\right) = q \sum_{i=q}^{q} \left(z_i \sum_{n=1}^{i-1} z_n\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{q} z_i z_i \leqq \sum_{i=1}^{q} z_i \cdot z_i \leqq q(2\tau)^2.$$

Первое и второе неравенства вытекают соответственно из свойств (4) и (2).

Следовательно, по определению q должно быть $\bar{z} \cdot \bar{z} \leqq \frac{1}{q}(2\tau)^2 \leqq \tilde{\epsilon}^2$, и мы доказали, что $\| z \| \leqq \epsilon$. Таким образом, ввиду свойства (3) для каждого $i = 1, \ldots, q$ мы имеем $x_i - \bar{z} \succ_i f_i$. Но так как

$$\sum_{i=1}^{q} (x_i - \bar{z}) = \sum_{i=1}^{q} x_i - \sum_{i=1}^{q} z_i = \sum_{i=1}^{q} e_i,$$

коалиция $\{1, \ldots, q\}$ может улучшить дележ f, что противоречит предположенному и, таким образом, завершает доказательство.

Утверждение 1. *Пусть последовательность* $(\mathcal{E}_n)$ *простых экономик с характеристиками из* $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$ *является чисто конкурентной. Если* $f_n \in \mathrm{C}(\mathcal{E}_n)$ $(n = 1, \ldots)$, *то последовательность* (f_n) *равномерно интегрируема.*

Заметим сначала, что в нашем случае последовательность (f_n), $f_n \in \mathrm{C}(\mathcal{E}_n)$, равномерно интегрируема тогда и только тогда, когда для каждой последовательности (B_n) из $B_n \subset A_n$ и $\lim \frac{|B_n|}{|A_n|} = 0$ следует

$$\lim \frac{1}{|A_n|} \sum_{a \in B_n} f_n(a) = 0.$$

Таким образом, утверждение 1 состоит в том, что в дележе из c-ядра вектор товаров, который назначается малой коалиции, является малым *на душу*. Так как по определению чисто конкурентной последовательности последовательность $(e \circ \mathcal{E}_n)$ начальных ресурсов равномерно интегрируема, можно ожидать, что дележи из c-ядра также равномерно интегрируемы. Далее (в утверждении 2 и в задаче 3) мы увидим, что последовательность (f_n) является ограниченной при условии, что ограниченной является последовательность $(e \circ \mathcal{E}_n)$ начальных ресурсов.

Доказательство*). Предположим, что утверждение 1 неверно. Тогда найдется хотя бы один товар h, который является "критическим" в

*) Идею другого доказательства см. в задаче 4.

следующем смысле: существует такая последовательность $B_n^h \subset A_n$, что

$$\lim \frac{|B_n^h|}{|A_n|} = 0,$$

$$\liminf_n \frac{1}{|A_n|} \sum_{a \in B_n^h} f_n^h(a) > 0.$$

Без потери общности можно предположить, что критическими являются первые l^* товаров. Положим

$$B_n := \bigcup_{n=1}^{l^*} B_n^h$$

и рассмотрим чистый торговый оборот коалиции B_n, т.е.

$$z(B_n) := \sum_{a \in B_n} (f_n(a) - \mathbf{e}(\mathcal{E}_n(a))).$$

Так как

$$\frac{1}{|A_n|} \sum_{a \in B_n} \mathbf{e}(\mathcal{E}_n(a))$$

сходится к нулю, для каждого $h = 1, \ldots, l^*$, мы имеем

$$\liminf_n \frac{1}{|A_n|} z^h(B_n) > 0.$$

Очевидно, что $l^* < l$, а для некоторого $h > l^*$ будет $z^h(B_n) < 0$, так как в противном случае для достаточно больших n чистый торговый баланс коалиции B_n был бы положителен, и, следовательно, непустая коалиция $A_n \backslash B_n$ могла бы улучшить дележ f_n.

Покажем теперь, что даже в случае $l^* < l$ коалиция $C_n := A_n \backslash B_n$ может улучшить дележ f_n при условии, что n достаточно велико. Идея доказательства проста: первоначально коалиция C_n имеет гораздо больше критических товаров ($h = 1, \ldots, l^*$), чем она получает в соответствии с дележом f_n. С другой стороны, чистый торговый баланс коалиции C_n по некритическим товарам ($h > l^*$) может оказаться положительным. Поэтому для каждого некритического товара h ($l^* < h \leq l$) можно найти такую группу участников V_n^h, которые хотят и имеют возможность изменить товар h на критический товар, например на первый. Если множества V_n^h ($h = l^* + 1, \ldots, l$) участников попарно не пересекаются, то можно определить вектор $g_n(a)$ следующим образом:

$$g_n(a) := \begin{cases} f_n(a), \text{ если } a \notin \bigcup_{h=l^*+1}^{l} V_n^h, \\ f_n(a) + \dfrac{1}{|V_n^h|}\left(\dfrac{z^1(B_n)}{l - l^*}, 0, \ldots, 0, z^h(B_n), 0, \ldots, 0\right), \text{ если } a \in V_n^h. \end{cases}$$

Таким образом, если $a \in V_n^h$, то этот участник получает $g_n(a)$ вместо $f_n(a)$ заменой товара h в количестве $z^h(B_n)/|V_n^h|$ на товар 1 в количестве

$z^1(B_n)/|V_n^h|(l-l^*)$. Для того чтобы эта замена была возможной, т.е. для выполнения неравенства $g_n(a) \geqq 0$, и вместе с тем желательной, т.е. для выполнения предпочтения $g_n(a) \succ_a f_n(a)$, нам необходимо потребовать, чтобы множества V_n^h обладали следующими свойствами:

(a) Участники из V_n^h должны обладать товаром h в положительных количествах, нижняя граница которых не зависит от n; в дальнейшем мы, например, потребуем, чтобы выполнялись неравенства

$$f_n^h(a) \geqq \frac{1}{2} e^{-h}, \quad h > l^*, \text{ где } \bar{e} := \lim \frac{1}{|A_n|} \sum_{A_n} \mathrm{e}(\&(a)).$$

(b) В $\mathbf{R}^l$ существует такое ограниченное множество, которое содержит дележ $f_n(a)$ для каждого участника $a \in V_n^h$, $h > l^*$, и каждого $n = 1, \ldots$

(c) В $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_+^l$ существует такое компактное множество, которое содержит характеристики каждого участника $a \in V_n^h$, $h > l^*$, для каждого $n = 1, \ldots$

(d) Для достаточно больших n

$$\liminf_n \frac{|V_n^h|}{|A_n|} > 0, \qquad z^1(B_n) \geqq |V_n^h|.$$

Прежде чем доказывать, что такие множества V_n^h действительно существуют, покажем, что из их существования следует, что коалиция C_n может улучшить дележ f, выбрав определенный выше дележ g_n.

Прежде всего покажем, что для достаточно больших n $g_n(a) \geqq 0$. Так как $\dfrac{z^h(B_n)}{|A_n|} \to 0$ для $h > l^*$, из свойства (d) следует, что $\dfrac{z^h(B_n)}{|V_n^h|}$ сходится к нулю. А так как ввиду свойства (a) для $a \in V_n^h$ $f_n^h(a) \geqq \dfrac{1}{2} e^{-h}$, то $g_n(a) \geqq 0$ для достаточно больших n.

Покажем теперь, что дележ g_n допустим для коалиции C_n:

$$\sum_{a \in C_n} [g_n(a) - \mathrm{e}(\&_n(a))] = \sum_{a \in C_n} [f_n(a) - \mathrm{e}(\&_n(a))] +$$

$$+ \sum_{h=l^*+1}^{l} \sum_{a \in V_n^h} \frac{1}{|V_n^h|} \left(\frac{z^1(B_n)}{l-l^*}, 0, \ldots, 0, z^h(B_n), 0, \ldots, 0 \right) =$$

$$= -z(B_n) + \sum_{h=l^*+1}^{l} \left(\frac{z^1(B_n)}{l-l^*}, 0, \ldots, 0, z^h(B_n), 0, \ldots, 0 \right) =$$

$$= -z(B_n) + (z^1(B_n), 0, \ldots, 0, z^{l^*+1}(B_n), \ldots, z^h(B_n), \ldots, z^l(B_n)) =$$

$$= (0, -z^2(B_n), \ldots, -z^{l^*}(B_n), 0, \ldots, 0) \leqq 0.$$

Покажем, наконец, что если n достаточно велико, то для $a \in V_n^h$ будет $g_n(a) \succ_a f_n(a)$. Рассмотрим величину

$$\sigma_{1n}(x, \succ) := \sup \left\{ \sigma \in \mathbf{R}_+ \,\middle|\, \left(x^1 + \frac{1}{l-l^*}, x^2, \ldots, x^h - \sigma, \ldots, x^l \right) \succ x \right\}.$$

Эта величина представляет собой максимальное количество товара h, которое участник 1 склонен заменить на $1/(l-l^*)$ единиц товара 1 при условии, что он обладает вектором товаров x. Легко показать, что σ_{1h} непрерывно зависит от x и $\succ$ и что при $x \geqq 0$, $x^h \gg 0$ и $\succ \in \mathcal{P}_{\mathrm{mo}}$ справедливо неравенство $\sigma_{1h}(x, \succ) > 0$. Пусть $\bar{\sigma}$ – инфимум $\sigma_{1h}(x, \succ)$, где инфимум берется по всем x из ограниченной области свойства (b), $x^h \geqq \frac{1}{2}\bar{e}^h$ $(h = l^*+1, \ldots, l)$ и все предпочтения принадлежат компактному множеству свойства (c). Отсюда следует, что $\bar{\sigma} > 0$ и при $a \in V_n^h$ $\bar{\sigma} \leqq \sigma_{1h}(f_n(a), \succ_a)$. Следовательно, по определению дележа g_n, если выполнены неравенства

$$\frac{z^1(B_n)}{|V_n^h|(l-l^*)} \geqq \frac{1}{l-l^*}, \qquad \frac{z^h(B_n)}{|V_n^h|} < \bar{\sigma},$$

то $g_n(a) \succ_a f_n(a)$ для $a \in V_n^h$. Первое из этих неравенств следует из свойства (d). Так как $z^h(B_n)/|A_n|$ сходится к нулю (для $h > l^*$) и так как, согласно свойству (d), $|A_n|/|V_n^h|$ ограничены снизу, тогда выполнено и второе неравенство.

Это очевидным образом доказывает, что коалиция C_n может улучшить дележ f_n, выбирая дележ g_n, так как все предпочтения предполагаются монотонными.

Построим теперь множества V_n^h.

(a) Рассмотрим товар h $(l^* < h \leqq l)$ и определим множество H_n^h участников из A_n следующим образом:

$$H_n^h := \left\{a \in A_n \setminus B_n \mid f_n^h(a) \geqq \frac{1}{2}\bar{e}^h\right\},$$

где

$$\bar{e} := \lim_n \frac{1}{|A_n|} \sum_{a \in A_n} \mathbf{e}(\mathcal{E}_n(a)).$$

Так как h – некритический товар, то ясно, что

$$\liminf_n \frac{|H_n^h|}{|A_n|} > 0.$$

Некоторый участник экономики $\mathcal{E}_n$ может, конечно, принадлежать нескольким множествам H_n^h. Однако мы можем выбрать такие подмножества $Q_n^h \subset H_n^h$, что для каждого n $Q_n^h \cap Q_n^{h'} = \phi$ $(h \neq h')$ и последовательность $(|Q_n^h|/|A_n|)$ не сходится к нулю. Без потери общности можно предполагать, что существует предел $\lim_n (|Q_n^h|/|A_n|)$, равный, например, $\rho_h > 0$ для $h = l^*+1, \ldots, l$; положим $\rho = \min_{l^* < h \leqq l} \rho_h > 0$.

(b) Определим для $h > l^*$ множества

$$W_n^h := \left\{a \in Q_n^h \mid f_n(a) \leqq \frac{ql}{\rho} \cdot \bar{e}\right\}.$$

Снова покажем, что $\liminf_n (|W_n^h| / |A_n|) > 0$. Действительно,

$$\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{1}{\bar{e}^j}\cdot\frac{1}{|A_n|}\sum_{a\in A_n} f_n^j(a)\right)\geqq$$

$$\geqq \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{1}{\bar{e}^j}\cdot\frac{1}{|A_n|}\sum_{a\in Q_n^h\setminus W_n^h} f_n^j(a)\right)\geqq$$

$$\geqq \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{\bar{e}^j}\cdot\frac{1}{|A_n|}\left(\frac{2l}{\rho}\bar{e}^j\,|\{a\in Q_n^h \mid f_n^j(a) > \frac{2l}{\rho}\bar{e}^j\}|\right)=$$

$$=\frac{2}{\rho|A_n|}\sum_{j=1}^{l}\left|\left\{a\in Q_n^h \mid f_n^j(a) > \frac{2l}{\rho}\bar{e}^j\right\}\right|\geqq\frac{2}{\rho}\,\frac{|Q_n^h\setminus W_n^h|}{|A_n|}.$$

Первый член этой последовательности неравенств с возрастанием n сходится к 1. Если бы, однако, последовательность $(|W_n^h| / |A_n|)$ сходилась к нулю, то последний член написанной цепочки неравенств сходился бы к $\frac{2}{\rho}\cdot\rho_n \gneqq 2$, что невозможно.

Без потери общности мы можем предположить, что предел $\lim_n (|W_n^h| / |A_n|)$ существует и равен, например, $\eta_h > 0$ для $h = l^* + 1, \ldots, l$; положим

$$\eta := \min_{l^* < h \leqq l} \eta_h > 0.$$

(c) Так как мера μ является плотной (§ 1.2, лемма), существует (D.I, (32)) такое компактное подмножество $\mathbf{K}$ пространства $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_+^l$, что $\mu_n(\mathbf{K}) \geqq 1 - \frac{\eta}{2}$, $\mu(\mathbf{K}) \geqq 1 - \frac{\eta}{2}$. Положим $V_n^h := W_n^h \cap \mathbf{K}$, $h = l^* + 1, \ldots, l$. Легко проверить, что

$$\liminf_n \frac{|V_n^h|}{|A_n|} > 0.$$

(d) Наконец, нам нужно показать, что $|V_n^h|$ растет не слишком быстро, а точнее, что для достаточно больших n $|V_n^h| \leqq z^1(B_n)$.

Рассмотрим какой-нибудь индекс $h > l^*$ и две последовательности чисел $(|V_n^h|)$ и $(z^1(B_n))$. Теперь либо для достаточно больших n будет $|V_n^h| \leqq z^1(B_n)$ и свойство (d) выполнено, либо же для бесконечного множества значений n будет $|V_n^h| > z^1(B_n)$. В этом случае мы выбираем такое подмножество V_n^h (которое снова обозначим V_n^h), что

$$|V_n^h| \leqq z^1(B_n) \leqq |V_n^h| + 1.$$

Для этой новой последовательности V_n^h мы по-прежнему имеем $\liminf \frac{|V_n^h|}{|A_n|} > 0$, поскольку $\liminf_n \frac{z^1(B_n)}{|A_n|} > 0$. Доказательство завершено.

Доказательство теоремы 1. Легко проверить, что два утверждения теоремы 1 эквивалентны друг другу и эквивалентны в свою очередь следующему утверждению:

(III) для каждой последовательности (f_n), где $f_n \in \mathbf{C}(\mathscr{E}_n)$, существует такая подпоследовательность $(f_n)_{n \in Q}$, $Q \subset N$, и такой вектор цен $p \in \Pi(\mu)$, что подпоследовательность $(f_n(\cdot) - \varphi(\mathscr{E}_n(\cdot), p))_{n \in Q}$ сходится по мере к нулю. Это последнее утверждение и будет теперь доказано.

Доказательство будет проведено по следующему плану.

(a) Прежде всего покажем, что некоторая подпоследовательность последовательности $(\mathscr{E}_n)$ (которая снова обозначается $(\mathscr{E}_n)$) имеет непрерывное представление (см. § 2.1) $(\tilde{\mathscr{E}}_n)$, определенное "предельной экономикой" $\mathscr{E}$: $(A, \mathscr{P}, \nu) \to \mathbf{T}$ и отображениями $\alpha_n : A \to A_n$, причем соответствующая последовательность дележей $\tilde{f}_n = f_n \circ \alpha_n$ сходится почти везде к дележу f предельной экономики $\mathscr{E}$. Для доказательства этого факта нам потребуется утверждение 1.

(b) Далее мы покажем, что "предельный дележ" $\lim \tilde{f} = f$ является вальрасовским дележом для предельной экономики $\mathscr{E}$. Для этого мы используем лемму 1.

(c) Наконец, мы покажем, что равновесные цены p, соответствующие вальрасовскому дележу f, обладают указанным в утверждении (III) свойством.

Перейдем к детальному осуществлению этих пунктов.

(a) Согласно утверждению 1, последовательность (f_n) равномерно интегрируема, и, следовательно, существует подпоследовательность, сходящаяся по распределению (D.I, (41) и (31)). Обозначим эту подпоследовательность снова (f_n).

Выберем теперь непрерывное представление последовательности $(\mathscr{E}_n, f_n)$. Точнее, согласно утверждению 2, (2), § 2.1, существует подпоследовательность последовательности $(\mathscr{E}_n, f_n)$ (которую мы снова обозначим $(\mathscr{E}_n, f_n)$), обладающая следующими свойствами: существует неатомическая экономика $\mathscr{E}$: $(A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathbf{T}$ с распределением μ и дележом f; кроме того, существуют такие измеримые отображения α_n: $A \to A_n$, что

$$\nu(\alpha_n^{-1}(S)) = \frac{|S|}{|A_n|} \quad \text{для каждого } S \subset A_n, \tag{1}$$

$$(\tilde{\mathscr{E}}_n, \tilde{f}_n) \to (\mathscr{E}, f) \quad \text{почти везде на } A, \tag{2}$$

где $\tilde{\mathscr{E}}_n = \mathscr{E}_n \circ \alpha_n$ и $\tilde{f}_n = f_n \circ \alpha_n$ $(n = 1, \dots)$.

Таким образом, согласно (1), неатомическая экономика $\tilde{\mathscr{E}}_n$ и простая экономика $\mathscr{E}_n$ имеют одно и то же распределение μ_n. Так как последовательность (f_n) равномерно интегрируема, из (2) следует, что $\int \tilde{f}_n d\nu \to \int f d\nu$. Следовательно, f является достижимым дележом в предельной экономике $\mathscr{E}$.

(b) Применим лемму 1 к экономике $\mathscr{E}_n$ и дележу $f_n \in \mathbf{C}(\mathscr{E}_n)$, выбрав при этом $\tau = k$ и $\epsilon = 1/k$ $(k = 1, 2, \dots)$. Тогда для любых целых k и n существует такой вектор $p_{k,n} \in \mathbf{R}^l$, $|p_{k,n}| = 1$, что $|F_{k,n}| \leqq 4k^4$, где

$F_{k,n}$ – множество тех участников, которых вектор цен $p_{k,n}$ "обедняет", т.е.

$$F_{kn} := \left\{ a \in A_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \| e(\mathcal{E}_n(a)) \| \leqq k \text{ и существует такой } x \in \mathbf{R}^l_+, \text{ что} \\ \| x \| \leqq k,\ p_{kn} \cdot x \leqq p_{kn} \cdot e(\mathcal{E}_n(a)) \text{ и } B_{1/k}(x) \succ_a f_n(a) \end{array} \right\}.$$

Доказательство основано на том факте, что число участников в множестве F_{kn} не зависит от числа участников в экономике $\mathcal{E}_n$. Поэтому для каждого k отношение $|F_{kn}|/|A_n|$ можно сделать сколь угодно малым, выбирая n достаточно большим. Следовательно, существует такая подпоследовательность (n_k) множества целых чисел N, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|F_{kn_k}|}{|A_{n_k}|} < \infty, \qquad p_{kn_k} \underset{k}{\to} p.$$

В оставшейся части доказательства мы будем рассматривать исключительно последовательности $\mathcal{E}_{n_k}$, F_{kn_k}, p_{kn_k}. Для упрощения снова будем обозначать эти последовательности $\mathcal{E}_n$, F_n, p_n. Таким образом, в упрощенных обозначениях имеем

$$p_n \to p, \text{ где } |p| = 1, \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|F_n|}{|A_n|} < \infty, \tag{4}$$

где

$$F_n := \left\{ a \in A_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \| e(\mathcal{E}_n(a)) \| \leqq n \text{ и существует такое } x \in \mathbf{R}^l_+, \text{ что} \\ \| x \| \leqq n,\ p_n \cdot x \leqq e(\mathcal{E}_n(a)) \text{ и } B_{1/n}(x) \succ_{\mathcal{E}_n(a)} f_n(a) \end{array} \right\}.$$

Пусть $\tilde{F}_n := \alpha_n^{-1}(F_n)$ $(n = 1, \ldots)$. Из (1) и (4) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(\tilde{F}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|F_n|}{|A_n|} < \infty.$$

Следовательно, из первой леммы Бореля – Кантелли (D.I, (10)) следует, что

$$\nu(\limsup_n \tilde{F}_n) = 0, \tag{5}$$

т.е. почти везде в A для достаточно больших n будет $\alpha_n(a) \notin F_n$.

Остается проверить, что пара (f, p) составляет равновесие Вальраса в экономике $\mathcal{E}$. Сначала покажем, что почти везде в A из $x \in \mathbf{R}^l_+$ и $p \cdot x < p \cdot e(\mathcal{E}(a))$ следует

$$x \not\succ_{\mathcal{E}(a)} (f(a)). \tag{6}$$

Достаточно доказать (6) для случая $x > 0$. Ввиду (2) и (5) найдется такое подмножество A' множества A, что $\nu(A') = 1$, $(\tilde{\mathcal{E}}_n(a), \tilde{f}_n(a)) \to (\mathcal{E}(a), f(a))$ для каждого $a \in A'$ и для достаточно большого n (зависящего от a) $\alpha_n(a) \notin F_n$. Таким образом, если $a \in A'$, $x > 0$ и $p \cdot x < p \cdot e(\mathcal{E}(a))$, то $p_n \cdot x < p_n e(\mathcal{E}_n(a))$ и $\alpha_n(a) \notin F_n$ для достаточно больших n. Поэтому из определения множества F_n следует, что для каждого достаточно большого n существует вектор $x_n \in \mathbf{R}_+^l$, обладающий свойством

$$x_n \in B_{1/n}(x), \qquad x_n \precsim_{\tilde{\mathcal{E}}(a)} \tilde{f}_n(a).$$

Так как $x_n \to x$ и $(\tilde{\mathcal{E}}_n(a), \tilde{f}_n(a)) \to (\mathcal{E}(a), f(a))$, по непрерывности (теорема 1 (c), § 1.2) получаем, что $x \precsim_{\mathcal{E}(a)} f(a)$. Тем самым свойство (6) доказано. Отсюда легко получается, что (f, p) является равновесием Вальраса в экономике $\mathcal{E}$.

(c) Проверим теперь, что вектор цен p обладает требуемым свойством. Мы имеем

$$\frac{1}{|A_n|} |\{a \in A_n \mid |f_n(a) - \varphi(\mathcal{E}_n(a), p)| \geqq \eta\}| =$$

$$= \nu\{a \in A \mid |\tilde{f}_n(a) - \varphi(\tilde{\mathcal{E}}_n(a), p)| \geqq \eta\} \leqq$$

$$\leqq \nu\{a \in A \mid |\tilde{f}_n(a) - \varphi(\mathcal{E}(a), p)| \geqq \eta/2\} +$$

$$+ \nu\{a \in A \mid |\varphi(\mathcal{E}(a), p) - \varphi(\tilde{\mathcal{E}}_n(a), p)| \geqq \eta/2\}.$$

Первое слагаемое в правой части этого неравенства сходится к нулю, потому что, как показано выше, последовательность $(\tilde{f}_n)$ сходится почти везде к $\varphi(\mathcal{E}(\cdot), p)$ и, следовательно, сходится по мере. Далее, так как $\hat{\mathcal{E}}_n(a) \to$ $\to \mathcal{E}(a)$ почти везде на A и так как отображение $\varphi(\cdot, p)$ из $\mathcal{P}^*_{\substack{\text{mo}\\ \text{sco}}} \times \mathbf{R}_+^l$ в $\mathbf{R}_+^l$ почти везде на A непрерывно, $\varphi(\tilde{\mathcal{E}}_n(a), p) \to \varphi(\mathcal{E}(a), p)$, и, следовательно, $\varphi(\tilde{\mathcal{E}}_n(a), p) \to \varphi(\mathcal{E}(a), p)$ по мере. Таким образом, второе слагаемое в правой части неравенства также сходится к нулю. Доказательство завершено.

Пусть $\mathrm{W}(\mathcal{E}^\mu)$ означает множество вальрасовских дележей в экономике id: $(\mathrm{T}, \mathcal{B}(\mathrm{T}), \mu) \to \mathrm{T}$. Множество распределений всех функций из $\mathrm{W}(\mathcal{E}^\mu)$ обозначается через $\mathcal{D}\mathrm{W}(\mathcal{E}^\mu)$. В части (b) доказательства теоремы 1 мы установили следующий результат.

Следствие 1. *Пусть последовательность $(\mathcal{E}_n)$ простых экономик является чисто конкурентной на $\mathcal{P}^*_{\substack{\text{mo}\\ \text{sco}}} \times \mathbf{R}_+^l$. Тогда имеют место следующие эквивалентные друг другу утверждения.*

(I) *Для каждой окрестности U множества $\mathcal{D}(\mathrm{W}(\mathcal{E}^\mu))$ существует такое целое число $\bar{n}$, что для каждого $n \geqq \bar{n}$ и каждого дележа $f \in \mathrm{C}(\mathcal{E}_n)$ его распределение принадлежит U.*

(II) *Для каждой последовательности $(\mathcal{E}_n, f_n)$, где $f_n \in \mathrm{C}(\mathcal{E}_n)$, имеется такая подпоследовательность, которая сходится по распределению к равновесному вальрасовскому дележу для μ.*

Следствие 2. *Пусть $\mathbf{K}$ – непустое компактное подмножество в $\mathcal{P}^*_{\substack{\text{mo}\\ \text{sco}}} \times \mathbf{R}_+^l$. Для каждых $\epsilon > 0$, $\eta > 0$ и $\rho > 0$ существует такое целое число $\bar{n}$, что для каждой простой экономики $\mathcal{E}\colon A \to \mathbf{K}$, для которой $|A| \geqq \bar{n}$ и $\frac{1}{|A|}\sum_A e_n \geqq \rho$, и для каждого дележа $f \in \mathrm{C}(\mathcal{E})$ существует* *такой вектор цен* $p > 0$, *что*

$$\frac{1}{|A|}\,|\,\{a \in A \mid |f(a) - \varphi(\mathcal{E}(a), p)| \geqq \eta\}\,| \leqq \epsilon.$$

Доказательство. Предположим, что это следствие неверно. Тогда существуют такие $\bar{\epsilon} > 0$, $\bar{\eta} > 0$ и $\bar{\rho} > 0$, что для каждого целого n имеются экономика $\mathcal{E}_n$: $A_n \to \mathbf{K}$, для которой $|A_n| \geqq n$, $\dfrac{1}{|A_n|}\sum_{A_n} e_n \geqq \rho$, и такой дележ $f_n \in \mathrm{C}(\mathcal{E}_n)$, что для каждого вектора цен $p > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{|A_n|}\,|\,\{a \in A_n \mid |f_n(a) - \varphi(\mathcal{E}_n(a), p)| \geqq \bar{\eta}\}\,| > \bar{\epsilon}.$$

Множество мер на компактном пространстве $\mathbf{K}$ слабо компактно (D.I, (30)). Следовательно, существует такая подпоследовательность (μ_{n_q}), что $\mu_{n_q} \to \mu$ и $\lim \int \mathrm{e}\, d\mu_{n_q} = \int \mathrm{e}\, d\mu > 0$. Применение теоремы 1 приводит к противоречию. Доказательство завершено.

Следствие 3. *Пусть* $(\mathcal{E}_n)$ – *последовательность реплицированных экономик со строго положительным общим начальным ресурсом. Если предпочтения всех участников строго выпуклы и монотонны, то для каждого* $\epsilon > 0$ *существует такое целое* $\bar{n}$, *что для каждого* $n \geqq \bar{n}$ *и для каждого дележа* $f \in \mathrm{C}(\mathcal{E}_n)$ *существует такое равновесие Вальраса* (f^*, p^*) *в* $\mathcal{E}_n$, *что* $|f(a) - f^*(a)| \leqq \epsilon$ *для любого участника* $a \in \mathcal{E}_n$.

Доказательство. Применим теорему 1 к последовательности $(\mathcal{E}_n)$ реплицированных экономик. Тогда для данных $\epsilon > 0$ и $\eta > 0$, $\epsilon < \dfrac{1}{|A_1|}$, существует такое целое $\bar{n}$, что для каждого $f \in \mathrm{C}(\mathcal{E}_n)$, $n \geqq \bar{n}$, существует вектор цен $p^* \in \Pi(\mu)$, обладающий свойством

$$\frac{1}{|A_n|}\,|\{a \in A_n \mid |f(a) - \varphi(a, p^*)| \geqq \eta\}| \leqq \epsilon.$$

Очевидно, что вектор цен $p^* \in \Pi(\mu)$ является также равновесным вектором цен в экономике $\mathcal{E}_n$; следовательно, $f^*(a)$ определяется множеством $\varphi(a, p^*)$. Так как в реплицированной экономике со строго выпуклыми предпочтениями дележи из c-ядра назначают один и тот же вектор товаров участникам с одинаковыми характеристиками (§ 2.1, задача 5), мы получаем равенство

$$|\{a \in A_n \mid |f(a) - f^*(a)| \geqq \eta\}| = 0.$$

Доказательство завершено.

Заключение следствия 3 является весьма сильным. Фактически оно состоит из двух заключений, которые можно было бы разделить, так как они имеют различную природу.

Первое заключение состоит в том, что вектор цен p^* приближенно децентрализует дележ из c-ядра для каждого участника экономики.

Второе заключение утверждает, что вектор цен p^* принадлежит $\Pi(\mathcal{E}_n)$, и, следовательно, дележ f из c-ядра "близок" к вальрасовскому дележу f^* в экономике $\mathcal{E}_n$. Существенную часть второго заключения составляет тот факт, что соответствие Π, ставящее в соответствие экономике множество ее равновесных цен, непрерывно на предельной экономике $\mathcal{E}$, т.е. $\mathrm{Ls}(\Pi(\mathcal{E}_n)) = \Pi(\mathcal{E})$.

Из результатов § 2.2 и 2.3 известно, что непрерывность везде равновесного соответствия Π нельзя получить, сужая множество характеристик участников. Можно показать, что Π непрерывно лишь в некотором обобщенном смысле *).

В остальной части этого параграфа мы исследуем вопрос о том, при каких условиях дележ из c-ядра может быть децентрализован с помощью подходящим образом выбранных цен для каждого участника экономики. Для того чтобы получить такой результат, нам необходимо сделать предположения более сильные, чем в теореме 1: мы должны предположить, что характеристики участников, в частности их начальные капиталы, не "слишком сильно" разбросаны. Математически это предположение выражается условием, состоящим в том, что характеристики участников принадлежат некоторому компактному множеству в $\mathcal{P}^*_{\substack{\mathrm{mo}\\ \mathrm{sco}}} \times \mathbf{R}^l_+$. Кроме того, когда экономика становится "большой", необходимо гарантировать, что для каждого участника a^* в экономике $\mathcal{E}_n$ имеется "много" других участников с теми же характеристиками, что и у участника a^*. Иначе говоря, мы будем предполагать, что никакой отдельный участник не является "изолированным". Математически это выражается включением

$$\mathrm{Ls}(\operatorname{supp}\mu_n) \subset \operatorname{supp}\mu,$$

отражающим тот факт, что каждая предельная точка характеристик участников содержится в носителе предельного распределения μ. Заметим, что из слабой сходимости последовательности (μ_n) к μ всегда следует, что $\operatorname{supp}\mu \subset \mathrm{Li}(\operatorname{supp}\mu_n)$. Таким образом, из совместного выполнения этих предположений вытекает, что носители распределений характеристик участников сходятся (в топологии замкнутой сходимости) к носителю предельного распределения μ.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{K}$ – *компактное подмножество* $\mathcal{P}^*_{\substack{\mathrm{mo}\\ \mathrm{sco}}} \times \mathbf{R}^l_+$. *Пусть последовательность* $(\mathcal{E}_n)$ *простых экономик с характеристиками из* $\mathbf{K}$ *является чисто конкурентной на* $\mathbf{K}$ *и* $\mathrm{Ls}(\operatorname{supp}\mu_n) \subset \operatorname{supp}\mu$. *Тогда для каждого* $\epsilon > 0$ *существует такое целое* $\bar{n}$, *что для каждого* $n \geq \bar{n}$ *и каждого дележа* $f \in C(\mathcal{E}_n)$ *существует вектор цен* $p \in \Pi(\mu)$, *обладающий свойством: для каждого* $a \in A_n$

$$|f(a) - \varphi(\mathcal{E}_n(a), p)| \leq \epsilon.$$

Для доказательства теоремы 2 потребуются два результата, которые мы установим раздельно. Сначала усилим утверждение 1 и покажем, что

*) По поводу этого высказывания см. следствие 1 из § 2.2 и теорему 5 из § 2.3. (*Примеч. пер.*)

на компактном множестве характеристик участников дележи из c-ядра равномерно ограничены. Точнее говоря, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть* $\mathbf{K}$ – *компактное множество* $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$ *и* $\delta > 0$. *Тогда существует такое ограниченное множество* $Q \subset \mathbf{R}^l$, *что для каждой простой экономики* $\mathcal{E}$: $A \to \mathbf{K}$, *для которой* $\frac{1}{|A|} \sum_A e_a \geqq \delta$, *для каждого дележа* $f \in \mathrm{C}(\mathcal{E})$ *и для каждого участника* $a \in A$ *будет* $f(a) \in Q$.

Доказательство. Доказательство почти совпадает с доказательством утверждения 1. Единственное различие состоит в определении "критического" товара.

Предположим, что утверждение 2 неверно. Тогда существуют последовательность простых экономик $(\mathcal{E}_n)$, для которых $|A_n| \to \infty$, и для каждого n такой дележ из c-ядра $f_n \in \mathrm{C}(\mathcal{E}_n)$, что последовательность (f_n) неограничена.

Не умаляя общности, можно предположить, что все товары разбиты на две группы следующим образом:

$$s^h = \infty, \quad \text{если} \quad h = 1, \dots, l^*,$$

$$s^h < \infty, \quad \text{если} \quad h = l^* + 1, \dots, l,$$

где

$$s^h = \sup_n \max_{a \in A_n} f_n^h(a).$$

Теперь для каждого из "критических" товаров $1 \leqq h \leqq l^*$ мы можем в экономике $\mathcal{E}_n$ выбрать "привилегированного" участника $a_n^h \in A_n$, для которого

$$f_n^h(a_n^h) = \max_{a \in A_n} f_n^h(a).$$

Пусть $B_n := \{a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^{l^*}\}$ – группа "привилегированных" участников. Рассмотрим чистый торговый баланс $z(B_n)$ коалиции B_n, т.е.

$$z(B_n) := \sum_{a \in B_n} (f_n(a) - \mathrm{e}(\mathcal{E}_n(a))).$$

Так как мы предположили, что начальные ресурсы ограничены, для h $(1 \leqq h \leqq l^*)$ будет

$$z^h(B_n) \to \infty.$$

Отсюда ясно, что $l^* < l$ и для некоторого $h > l^*$ $z^h(B_n) < 0$, так как в противном случае для достаточно больших n коалиция B_n имела бы положительный чистый торговый баланс и непустая коалиция $A_n \backslash B_n$ могла бы улучшить дележ f_n. Далее доказательство продолжается в точности, как в утверждении 1: определяются множества H_n^h, Q_n^h, W_n^h, и, так как по предположению множество $\mathbf{K}$ компактно, множество V_n^h совпадает с множеством W_n^h. Доказательство завершено.

Лемма 2. *Пусть* μ – *мера на* $\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$ *с компактным носителем, а* f: $\mathcal{P} \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^l$ – *такая непрерывная функция, что* $\int (f - \mathrm{e})\, d\mu = 0$. *Тогда* *для каждого* $t_0 \in \operatorname{supp}\mu$ *в* $\operatorname{supp}\mu$ *существуют точки* $t_1, \ldots, t_r$, *где* $r \leqq 2l + 2$, *обладающие следующими свойствами*: *для каждого* $\theta > 0$ *существуют такие положительные целые числа* $N_0, N_1, \ldots, N_r$, *что*:

(I) $\left| \sum\limits_{i=0}^{r} N_i(f(t_i) - \mathrm{e}(t_i)) \right| < \theta$;

(II) *для каждого товара* h *найдется такой индекс* i $(0 \leqq i \leqq r)$, *что* $f^h(t_i) \geq (\int \mathrm{e}\, d\mu)^h$.

Доказательство. Пусть функция g: $\operatorname{supp}\mu \to \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l$ определена равенством $g(t) = (f(t), \mathrm{e}(t))$. Так как g непрерывно, множество $S := g(\operatorname{supp}\mu)$ компактно. Очевидно, что $\bar{g} := \int g d\mu \in \operatorname{conv} S$. Покажем, что существует такой вектор $z \in \operatorname{conv} S$, что

$$\bar{g} = \lambda g(t_0) + (1 - \lambda) z, \quad 0 < \lambda \leqq 1. \tag{1}$$

Действительно, компактное множество S есть носитель меры $\gamma := \mu \circ g^{-1}$ и $\bar{g}$ — ее центр тяжести в смысле γ, т.е. $\bar{g} = \int x\, d\gamma(x)$. Известно, что этот центр тяжести $\bar{g}$ принадлежит относительной внутренности $\operatorname{conv} S$. (Последнее утверждение следует из того факта, что каждая гиперплоскость, проходящая через центр тяжести $\bar{g}$ и разделяющая $\bar{g}$ и $\operatorname{conv} S$, содержит $\operatorname{conv} S$.) Так как $z \in \operatorname{conv} S$, то

$$z = \sum_{i=1}^{2l+1} \lambda_i g(t_i), \quad t_i \in \operatorname{supp}\mu, \quad \lambda_i \geqq 0, \quad \sum \lambda_i = 1.$$

Таким образом, из (1) следует

$$\bar{g} = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i g(t_i),$$

где $\alpha_i > 0$, $\sum \alpha_i = 1$ и $r \leqq 2q + 2$. Следовательно,

$$\left(\int f d\mu, \int \mathrm{e}\, d\mu\right) = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i (f(t_i), \mathrm{e}(t_i)). \tag{2}$$

Так как по предположению $\int f d\mu = \int \mathrm{e} d\mu$, имеем

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i (f(t_i) - \mathrm{e}(t_i)) = 0. \tag{3}$$

Согласно хорошо известному результату из теории чисел (см., например, Харди и Райт, (1960), теорема 201), для каждого $\eta > 0$ здесь найдутся такие положительные целые числа $N_0, \ldots, N_r$ и N, что

$$|N_i - \alpha_i N| \leqq \eta, \quad i = 0, \ldots, r.$$

Поэтому из (3) получается неравенство

$$\left| \sum_{i=0}^{r} N_i (f(t_i) - \mathrm{e}(t_i)) \right| \leqq \eta \sum_{i=0}^{r} |f(t_i) - \mathrm{e}(t_i)|,$$

из которого при достаточно малом $\eta > 0$ вытекает свойство (I). Наконец, из (2) следует равенство

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i f(t_i) = \int \mathrm{e}\, d\mu,$$

которое очевидным образом доказывает свойство (II). Доказательство завершено.

Доказательство теоремы 2. Достаточно показать, что для каждой последовательности $(\mathcal{E}_n)$ и каждой последовательности (f_n), где $f_n \in C(\mathcal{E}_n)$, существуют такие подпоследовательность $(f_n)_{n\in Q}$ и вектор цен $p \in \Pi(\mu)$, что

$$|f_n(\cdot) - \varphi(\mathcal{E}_n(\cdot), p| \xrightarrow[n \in Q]{} 0 \text{ равномерно на } A_n. \tag{1}$$

Применим теорему 1. Согласно этой теореме, существуют такие подпоследовательность $(f_n)_{n\in Q}$ и вектор цен $p \in \Pi(\mu)$, что

$$|f_n(\cdot) - \varphi(\mathcal{E}_n(\cdot), p| \xrightarrow[n \in Q]{} 0 \text{ по мере}. \tag{2}$$

Поэтому существует новая подпоследовательность $(f_n)_{n\in Q'}$ последовательности $(f_n)_{n\in Q}$ и подмножества $E_n \subset A_n (n \in Q')$, обладающая следующими свойствами:

$$\frac{|E_n|}{|A_n|} \to 0, \quad |f_n(\cdot) - \varphi(\mathcal{E}_n(\cdot), p| \xrightarrow[n \in Q']{} 0 \text{ равномерно на } A_n \backslash E_n. \tag{3}$$

Пусть u: $\mathscr{P}^*_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$ – непрерывная "функция полезности", т.е. $u(\precsim, x) \leqq u(\precsim, y)$ тогда и только тогда, когда $x \precsim y$. (По поводу существования функции см., например, задачу 7 из § 1.2.) Покажем сначала, что

$$|u(\mathcal{E}_n(\cdot), f_n(\cdot)) - u(\mathcal{E}_n(\cdot), \varphi(\mathcal{E}_n(\cdot), p))| \xrightarrow[n \in Q']{} 0 \text{ равномерно на } A_n. \tag{4}$$

Предположим, что (4) неверно. Тогда существуют такие $\bar{\epsilon} > 0$ и $a^*_n \in A_n$, что для бесконечного множества значений n из Q'

$$|u(\mathcal{E}_n(a^*_n), f_n(a^*_n)) - u(\mathcal{E}_n(a^*_n), \varphi(\mathcal{E}_n(a^*_n), p))| > \bar{\epsilon}. \tag{5}$$

Мы можем считать, что $\mathcal{E}_n(a^*_n) \to t^* = (\precsim^*, e^*)$, и, так как по предположению $\mathrm{Ls}(\mathrm{supp}\, \mu_n) \subset \mathrm{supp}\, \mu$, должно быть $t^* \in \mathrm{supp}\, \mu$. Следовательно, так как функция u: $\mathscr{P}^*_{\substack{\mathrm{mo}\\ \mathrm{sco}}} \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$ непрерывна, то

$$u(\mathcal{E}_n(a^*_n), \varphi(\mathcal{E}_n(a^*_n), p)) \to u(t^*, \varphi(t^*, p)).$$

Из (5) следует, что для бесконечного множества значений n выполняется одно из следующих неравенств:

$$u(\mathcal{E}_n(a^*_n), f_n(a^*_n)) < u(t^*, \varphi(t^*, p)) - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}, \tag{6a}$$

$$u(\mathcal{E}_n(a^*_n), f_n(a^*_n)) > u(t^*, \varphi(t^*, p)) + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}. \tag{6b}$$

Рассмотрим сначала случай (6a). Из леммы 2 следует, что для каждых $\theta > 0$ и $t_0(:= t^*)$ существуют такие точки $(\precsim_i, e_i) = t_i \in \mathrm{supp}\, \mu$ и такие положительные числа $N_0, \ldots, N_r$, что

$$|\sum_{i=0}^{r} N_i(\varphi(t_i, p) - e_i)| < \theta. \tag{7}$$

Насколько малым нужно выбрать θ, будет решено в ходе доказательства ниже. Заметим, что $r \leqq 2l + 2$ не зависит от θ. Из сходимости $\mu_n \to \mu$ следует, что для каждой окрестности U_i точки t_i $(i = 0, \ldots, r)$ для достаточно больших n выполняется неравенство

$$|\{a \in A_n \backslash E_n \mid \mathcal{E}_n(a) \in U_i\}| \geqq N_i.$$

Так как функции $\varphi(\cdot, p)$ и $\mathbf{e}(\cdot)$ непрерывны, из (7) следует (при условии, что окрестности U_i выбраны достаточно малыми), что существует такая коалиция $B_n \subset A_n \setminus E_n$, что для бесконечного множества значений n

$$\varphi(t^*, p) - e^* + \sum_{B_n} (\varphi(\mathcal{E}_n(a), p) - \mathbf{e}(\mathcal{E}_n(a))) \,| < 2\theta.$$

Для упрощения обозначений начальный ресурс участника $a \in A_n$ будем обозначать через $e_n(a)$ (вместо $\mathbf{e}(\mathcal{E}_n(a))$). Из (3) следует, что для бесконечного множества значений n

$$|\,\varphi(t^*, p) - e^* + \sum_{B_n} (f_n(a) \quad e_n(a))\,| < 3\theta. \tag{8}$$

Из (6а) следует существование такого вектора $d \geqslant 0$, что для бесконечного множества значений n

$$\varphi(t^*, p) - d \succ_{a_n^*} f_n(a_n^*).$$

В случае, когда $\varphi(t^*, p) > 0$, мы, очевидно, можем выбрать $d > 0$, и тогда дележ g_n доминирует дележ f_n по коалиции $a_n^* \cup B_n$, где

$$g_n(a) = \begin{cases} \varphi(t^*, p) - d, & \text{если} \quad a = a_n^*, \\ f_n(a), & \text{если} \quad a \in B_n. \end{cases}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что для некоторого n

$$\sum_{a_n^* \cup B_n} (g_n - e_n) \leqq 0.$$

Мы имеем

$$\sum_{a_n^* \cup B_n} (g_n - e_n) = \varphi(t^*, p) - d - e_n(a_n^*) + \sum_{B_n} (f_n - e_n) =$$

$$= [\varphi(t^*, p) - e^* + \sum_{B_n} (f_n - e_n)] + e^* - e_n(a_n^*) - d <$$

$$< 3\theta + (e^* - e_n(a_n^*)) - d.$$

Так как $e_n(a_n^*) \to e^*$, можно выбрать $\theta \leqq \dfrac{1}{4} \min\{d^1, \ldots, d^l\}$ и получить, что для достаточно большого n дележ g_n допустим для B_n.

Рассмотрим теперь случай, когда вектор d не является строго положительным; пусть, например, $d = \{\delta, 0, \ldots, 0\}$. В этом случае мы собираемся использовать часть вектора d для замены других товаров.

Для данной точки $(\precsim, x) \in \mathcal{P}^*_{\substack{\mathrm{mo}\\ \mathrm{sco}}} \times \mathbf{R}^l_+$ положим

$$\sigma^h(\precsim, x) := \max \{\xi \in \mathbf{R} \mid x + (d^1, 0, \ldots, -\zeta, \ldots, 0) \succsim x\},$$

где $d^1 = \delta/l > 0$. Легко проверить, что

$$d^h := \min\{\sigma^h(\precsim, x) \mid |x| \leqq b,\ x^h \geqq \bar{e}^h,\ (\precsim, x) \in \mathbf{K}\} > 0,$$

где

$$b = 2 \max_{t \in \mathbf{K}} |\varphi(t, p)| < \infty, \quad \bar{e}^h = \frac{1}{2} \int \mathrm{e}^h\, d\mu.$$

Из второй части леммы 2 следует, что для каждого товара $h = 2, \ldots, l$ найдется такой участник $a^h \in B_n$, что $f_n^h(a^h) \geqq \bar{e}^h$. Определим для коалиции $a_n^* \cup B_n$ дележ g_n следующим образом:

$$g_n(a) := \begin{cases} \varphi(t^*, p) - (\delta, 0, \ldots, 0), & \text{если } a = a_n^*, \\ f_n(a^h) + (d^1, 0, \ldots, -d^h, \ldots, 0), & \text{если } a = a^h, \\ f_n(a), & \text{если } a \in B_n, \end{cases}$$

$$a \neq a^h,\ h = 2, \ldots, l.$$

Ясно, что $g_n(a_n^*) \succ_{a_n^*} f_n(a_n^*)$, и, так как $B_n \subset A_n \setminus F_n$, из (3) следует, что $|f_n(a)| \leqq b$ для $a \in B_n$ и достаточно больших n; поэтому $g_n(a) \succsim_a f_n(a)$. Кроме того,

$$\sum_{a_n^* \cup B_n} (g_n - e_n) = \varphi(t^*, p) - (\delta, 0, \ldots, 0) - e_n(a_n^*) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{l} [f_n(a^h) + (d^1, \ldots, -d^h, 0, \ldots, 0) - e_n(a^h)] +$$

$$+ \sum_{B_n \setminus \{a^2, \ldots, a^l\}} (f_n(a) - e_n(a)) = \varphi(t^*, p) - e^* +$$

$$+ \sum_{B_n} (f_n - e_n) + (e^* - e_n(a_n^*)) + (d^1, \ldots, d^l) <$$

$$< 3\theta + (e^* - e_n(a_n^*)) - (d^1, \ldots, d^l).$$

Таким образом, так как $e_n(a_n^*) \to e^*$, можно выбрать $\theta \leqq \frac{1}{4} \min\{d^1, \ldots, d^l\}$ и получить неравенство

$$\sum_{a_n^* \cup B_n} (g_n - e_n) \leqq 0.$$

Случай (6b) рассматривается аналогично. На основании неравенства (7) строится (подобно тому, как строилась коалиция B_n, удовлетворяющая равенству (8)) такая коалиция $B_n \subset A_n \setminus F_n$, что

$$\left|\sum_{B_n} (f_n(a) - e_n(a))\right| < 3\theta,$$

и, кроме того, обладающая дополнительным свойством:

$$\min_{a \in B_n} d(\mathcal{E}_n(a), t^*) \to 0.$$

Таким образом, коалиция $A_n \setminus B_n =: C_n$ содержит участника a_n^*, и для нее очевидным образом выполнено неравенство

$$\left|\sum_{C_n} (f_n(a) - e_n(a))\right| < 3\theta.$$

Так как $t^* = \lim \mathcal{E}_n(a_n^*) \in \operatorname{supp}\mu$ и $(|E_n| / |A_n|) \to 0$, то существует такая последовательность $(\tilde{a}_n)$, $\tilde{a}_n \in A_n \setminus E_n$, что $\mathscr{E}_n(\tilde{a}_n) \to t^*$. Следовательно, описанное выше построение непустых множеств B_n возможно. Рассмотрим теперь коалицию M_n, которая получается из коалиции C_n заменой участника a_n^* участником $\tilde{a}_n$. Подобно тому как это делалось в случае (6а), можно показать, что если n достаточно велико, то коалиция M_n может улучшить дележ f_n. Для этого достаточно заметить, что участник $\tilde{a}_n$ вносит в коалицию M_n почти такой же начальный ресурс, как и участник a_n^*, и если ему предлагается $f_n(a_n^*)$, то он стремится к побочным платежам. Этот факт позволяет коалиции M_n улучшить дележ f_n.

Наконец, необходимо показать, что из (4) следует (1). Пусть $a_n \in A_n$ и $\mathscr{E}_n(a_n) \to t^*$. Нам нужно показать, что $f_n(a_n) \to \varphi(t^*, p) =: z$.

Так как $t^* \in \operatorname{supp} \mu$, то существует такая последовательность $(\tilde{a}_n)$, $\tilde{a}_n \notin E_n$, что $\mathscr{E}_n(\tilde{a}_n) \to t^*$. Поэтому ввиду (3) отсюда следует, что $f_n(\tilde{a}_n) \to z$.

Согласно утверждению 2, последовательность $f_n(a_n)$ ограничена. Следовательно, мы можем предположить, что $f_n(a_n) \to y$. Ввиду (4) мы получаем, что $y \sim_{t^*} z$. Если $y \neq z$, то $\frac{1}{2}(y + z) \succ_{t^*} y$, так как отношение $\succ_{t^*}$ строго выпукло. Следовательно, если n достаточно велико, то для обоих участников a_n и $\tilde{a}_n$ среднее $\frac{1}{2}(f_n(a_n) + f_n(\tilde{a}_n))$ предпочтительнее соответственно дележей $f_n(a_n)$ и $f_n(\tilde{a}_n)$. Поэтому для достаточно больших n дележ f_n не будет оптимальным по Парето, т.е. коалиция A_n может улучшить дележ f_n. Доказательство завершено.

§ 3.3. Предельные теоремы при отсутствии выпуклости отношений предпочтения

В этом параграфе мы собираемся проанализировать ту роль, которую играло в теореме 1 и ее следствиях условие строгой выпуклости отношений предпочтения.

Сначала мы должны переформулировать заключение теоремы 1, так как при отсутствии строгой выпуклости отношений предпочтения множество спроса $\varphi(a, p)$ может содержать более одного вектора. Итак, заменим в заключении теоремы 1 расстояние $|f_n(a) - \varphi(\mathscr{E}(a), p)|$ на

$$\operatorname{dist}[f_n(a), \varphi(\mathscr{E}(a), p)] := \inf \{\| f_n(a) - x \| \mid x \in \varphi(\mathscr{E}(a), p)\}.$$

К сожалению, как легко можно показать на примерах, теорема 1, модифицированная таким образом, неверна даже в случае, когда все отношения предпочтения принадлежат компактному множеству и выпуклы, но не строго выпуклы.

Проанализируем доказательство теоремы 1. На первых двух шагах доказательства мы нигде не использовали предположения о строгой выпуклости отношений предпочтения. Утверждение 1, которое использовалось в части (a) доказательства, и лемма 1, которая использовалась в части (b), были доказаны вообще без какого-либо предположения о выпуклости. (Конечно, в этом случае c-ядро может оказаться и пустым.) Имеет место следующий результат, аналогичный следствию 1 теоремы 1.

Утверждение 3. *Пусть последовательность* $(\mathcal{E}_n)$ *простых экономик* $\mathcal{E}_n : A_n \to \mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_t^l$ *является чисто конкурентной на* $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_+^l$. *Тогда для каждой последовательности* $(\mathcal{E}_n, f_n)$, *где* $f_n \in \mathbf{C}(\mathcal{E}_n)$, *существует такая подпоследовательность* $(\mathcal{E}_n, f_n)_{n \in Q}$, $Q \subset N$, *которая сходится по распределению к равновесному распределению Вальраса для предельного распределения* $\mu = \lim \mu_n$.

Вопрос теперь состоит в следующем: можно ли использовать равновесные цены p, соответствующие равновесному по Вальрасу распределению τ, для того, чтобы приближенно децентрализовать для больших $n \in Q$ дележ из c-ядра? В части (c) доказательства теоремы 1 это было возможно, потому что соответствие спроса $\varphi(\cdot, p)$ представляло собой однозначную непрерывную функцию. Это — единственное место, где мы использовали предположение о строгой выпуклости. Если отображение спроса непрерывно (т.е. полунепрерывно одновременно и сверху, и снизу), то аналогично части (c) доказательства теоремы 1 можно получить следующий результат.

Утверждение 4. *Пусть последовательность* $(\mathcal{E}_n)$ *простых экономик* $\mathcal{E}_n : A_n \to \mathbf{T}$ *является чисто конкурентной на* $\mathbf{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_+^l)$. *Если для каждого* $p \in \Pi(\mu)$ *сужение* $\varphi(\cdot, p)_{\mathbf{T}}$ *на* $\mathbf{T}$ *соответствия спроса* $\varphi(\cdot, p)$ μ*-почти везде непрерывно на* $\mathbf{T}$, *то для каждого* $f_n \in \mathbf{C}(\mathcal{E}_n)$ *существует такой вектор цен* $p \in \Pi(\mu)$, *что последовательность* $(\operatorname{dist}[f_n, \varphi(\mathcal{E}_n(\cdot), p_n)])$ *сходится по мере к нулю, т.е. для каждого* $\eta > 0$

$$\frac{1}{|A_n|} \,|\{a \in A_n \mid \operatorname{dist}[f_n(a), \varphi(\mathcal{E}_n(a), p_n)] \geqq \eta\}| \to 0.$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать это утверждение для некоторой подпоследовательности последовательности (f_n). Части (a) и (b) доказательства теоремы 1 остаются без каких-либо изменений. Таким образом, в прежних обозначениях последовательность $(\tilde{f}_n)$ сходится почти везде к вальрасовскому дележу f в экономике $\mathcal{E}$, и, следовательно,

$$\operatorname{dist}[\tilde{f}_n(a), \varphi(\mathcal{E}(a), p)] \to 0 \text{ почти везде на } A.$$

Так как по предположенному соответствие $\varphi(\cdot, p)$ полунепрерывно снизу в точке $\mathcal{E}(a)$ и так как $f(a) \in \varphi(\mathcal{E}(a), p)$ и $\tilde{\mathcal{E}}_n(a) \to \mathcal{E}(a)$, существует такая сходящаяся к $f(a)$ последовательность (y_n), что $y_n \in \varphi(\tilde{\mathcal{E}}_n(a), p)$. Следовательно,

$$\operatorname{dist}[\tilde{f}_n(a), \varphi(\tilde{\mathcal{E}}_n(a), p)] \leqq |\tilde{f}_n(a) - y_n| \leqq$$
$$\leqq |\tilde{f}_n(a) - f(a)| + |f(a) - y_n|.$$

Эти неравенства показывают, что почти везде на A $\operatorname{dist}[\tilde{f}_n(a), \varphi(\tilde{\mathcal{E}}(a), p)] \to 0$. Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\frac{1}{|A_n|} \,|\{a \in A_n \mid \operatorname{dist}[f_n(a), \varphi(\mathcal{E}_n(a), p)] \geqq \eta\}| =$$
$$= \nu\{a \in A_n \mid \operatorname{dist}[\tilde{f}_n(a), \varphi(\tilde{\mathcal{E}}_a(n), p)] \geqq \eta\}.$$

Требуемый результат установлен.

Предположение о непрерывности $\varphi(\cdot, p)|_{\mathrm{T}}$ выполнено тривиальным образом, если множество характеристик участников дискретно. Таким образом, мы имеем следующий легко получаемый, но интересный результат.

Следствие 1. *Пусть* $\mathcal{E}: A \to \mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$ – *простая экономика и* $\sum_A e > 0$. *Тогда* $f \in \mathbf{W}(\mathcal{E})$ *в том и только том случае, когда* $f_n \in \mathbf{C}(\mathcal{E}_n)$ $(n = 1, \ldots)$, *где* f_n *и* $\mathcal{E}_n$ *обозначают n-кратные репликации соответственно* f *и* $\mathcal{E}$.

Доказательство. Если $f \in \mathbf{W}(\mathcal{E})$, то $f_n \in \mathbf{W}(\mathcal{E}_n)$ и, следовательно, $f_n \in \mathbf{C}(\mathcal{E}_n)$. С другой стороны, если $f_n \in \mathbf{C}(\mathcal{E}_n)$ $(n = 1, \ldots)$, то из утверждения 4 следует, что существует такой вектор цен p, что $f(a) \in \varphi(\mathcal{E}(a), p)$, $a \in A$. Доказательство завершено.

Если множество $\mathbf{T}$ характеристик участников (из которых строится последовательность экономик $(\mathcal{E}_n)$) не является существенно ограниченным, например если $\mathbf{T} = \mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$ или даже $T = \mathcal{P}^*_{\substack{\mathrm{mo}\\ \mathrm{sco}}} \times \mathbf{R}^l_+$, то сужение на $\mathbf{T}$ соответствия φ полунепрерывно снизу в точке $(\succ, e) \in \mathbf{T}$ тогда и только тогда, когда φ однозначно. Таким образом, для произвольного множества $\mathbf{T}$ условие утверждения 4 принимает вид

(*) предельное распределение μ на $\mathbf{T}$ таково, что для каждого $p \in \Pi(\mu)$ множество спроса $\varphi(\succ, p \cdot e, p)$ μ-почти везде на $\mathbf{T}$ состоит только из одной точки.

Хотя легко привести примеры мер, обладающих свойством (*), но сколько-нибудь полная характеризация таких мер нам неизвестна. Этот вопрос остается открытым. Пока же мы будем обеспечивать выполнение свойства (*) "грубой силой". Наиболее простой способ сделать это, конечно, состоит в ограничении области характеристик участников. Например, можно было бы положить $\mathbf{T} = \mathcal{P}^*_{\substack{\mathrm{mo}\\ \mathrm{sco}}} \times \mathbf{R}^l_+$, как это мы сделали в предыдущем параграфе, или же считать $\mathbf{T}$ дискретным подпространством пространства $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$.

Приведем теперь одну предельную теорему, которая не требует ограничения области характеристик участников. В этом случае, как мы уже знаем, необходимо ослабить заключение теоремы; мы уже не можем показать, что для большинства участников дележ из c-ядра $f(a)$ близок в пространстве товаров к множеству спроса $\varphi(a, p)$ для подходящим образом выбранного вектора цен p. Однако во всяком случае можно потребовать, чтобы значение $p \cdot f(a)$ не слишком сильно отличалось от дохода $p \cdot \mathbf{e}(\mathcal{E}(a))$. Остается только измерить отклонение дележа из c-ядра $f(a)$ от множества спроса. Для этого мы предлагаем две формулировки: во-первых, можно зафиксировать малое положительное число $\epsilon > 0$ и потребовать, чтобы не существовало вектора x, более предпочтительного для участника a, чем дележ из c-ядра $f(a)$, и который в ценах p стоит меньше, чем $p\mathbf{e}(\mathcal{E}(a)) - |p|\,\epsilon$. Очевидно, в состоянии равновесия ϵ может быть произвольно малым. Или, другими словами, можно сравнить доход $p \cdot \mathbf{e}(\mathcal{E}(a))$ с минимальной стоимостью тех векторов товаров, которые являются более предпочтительными, чем дележ из c-ядра $f(a)$, т.е. с величиной $\inf_{x \succ_a f(a)} p \cdot x$. Ясно, что в состоянии равновесия эта величина равна доходу $p \cdot \mathbf{e}(\mathcal{E}(a))$.

Т е о р е м а 3. *Пусть последовательность* $(\mathcal{E}_n)$ *простых экономик является чисто конкурентной на* $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$. *Тогда для каждого* $f_n \in \mathbf{C}(\mathcal{E}_n)$ *существует такой вектор цен* $p_n \in \Pi(\mu)$ $(n = 1, \ldots)$, *что для каждого* $\epsilon > 0$ *выполняются условия*:

$$\text{(I)} \quad \frac{1}{|A_n|}\,|\{a \in A_n \mid |p_n \cdot f_n(a) - p_n\,\mathbf{e}(\mathcal{E}_n(a))| \geqq \epsilon\}| \to 0;$$

$$\text{(II)} \quad \frac{1}{|A_n|}\left|\left\{a \in A_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{существует такой вектор } x \in \mathbf{R}^l_+, \text{ что} \\ x \succ_{\mathcal{E}_n(a)} f_n(a) \text{ и } p_n \cdot x \leqq p_n \cdot \mathbf{e}(\mathcal{E}_n(a)) - \epsilon \end{array}\right\}\right| \mapsto 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что достаточно доказать утверждения (I) и (II) для некоторой подпоследовательности последовательности (f_n). Итак, части (a) и (b) доказательства теоремы 1 применимы без каких-либо изменений. Следовательно, в прежних обозначениях последовательность $(\tilde{f}_n)$ сходится почти везде к вальрасовскому дележу f в экономике $\mathcal{E}$.

Утверждение (I) теперь получается легко. Действительно, так как почти везде на A

$$p \cdot f(a) = p \cdot \mathbf{e}(\mathcal{E}(a)), \quad \tilde{f}_n(a) \to f(a), \qquad \tilde{\mathcal{E}}_n(a) \to \mathcal{E}(a),$$

последовательность $(p \cdot \tilde{f}_n(a) - p \cdot \mathbf{e}(\tilde{\mathcal{E}}_n(a)))$ сходится почти везде (а следовательно, и по мере) к нулю. Из этого вытекает утверждение (I).

Утверждение (II) следует из определения "исключительного" множества F_n в доказательстве теоремы 1. Действительно, там было показано, что каждому дележу из c-ядра f_n соответствует вектор цен p, обладающий следующими свойствами (3), (4):

$$p_n \to p, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|F_n|}{|A_n|} < \infty,$$

где

$$F_n = \left\{a \in A_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \|\mathbf{e}(\mathcal{E}_n(a))\| \leqq n \text{ и существует такой вектор } x \in \mathbf{R}^l_+, \text{ что} \\ \|x\| \leqq n,\ p_n \cdot x \leqq p_n \cdot \mathbf{e}(\mathcal{E}_n(a)) \text{ и } B_{1/n}(x) \succ_{\mathcal{E}_n(a)} f_n(a) \end{array}\right\}.$$

Так как последовательность (μ_n) плотна, для каждого $\delta > 0$ существует такое компактное множество $\mathbf{K}$ в $\mathbf{R}^l$, что

$$\frac{1}{|A_n|}\,|\{a \in A_n \mid \mathbf{e}(\mathcal{E}_n(a)) \notin \mathbf{K}\}| \leqq \frac{\delta}{2}, \quad n = 1, \ldots.$$

Так как $p_n \to p$ и $p > 0$, из определения множества F_n получаем, что $\frac{1}{|A_n|}\,|\tilde{F}_n| \to 0$, где

$$\tilde{F}_n := \left\{a \in A_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{существует такой вектор } x \in \mathbf{R}^l_+, \text{ что} \\ p_n \cdot x \leqq p_n \cdot \mathbf{e}(\mathcal{E}_n(a)) \text{ и } B_{1/n}(x) \succ_{\mathcal{E}_n(a)} f_n(a) \end{array}\right\}.$$

Итак, мы показали, что для каждого $\epsilon > 0$

$$\text{(III)} \quad \frac{1}{|A_n|} \left| \left\{ a \in A_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{существует такой вектор } x \in \mathbf{R}^l_+ \text{, что} \\ p_n \cdot x \leqq p_n \cdot \mathrm{e}(\mathcal{E}_n(a)) \text{ и } B_\epsilon(x) \succ_{\mathcal{E}_n(a)} f_n(a) \end{array} \right\} \right| \mapsto 0.$$

Из этого свойства следует утверждение (II). Действительно, если участник a принадлежит исключительному множеству из утверждения (II) для некоторого $\epsilon > 0$, то вектор $x + (\epsilon)$ обладает следующим свойством: если $n \leqq \frac{1}{l}\epsilon$, то $B_n(x+\epsilon)) \succ_{\mathcal{E}_n(a)} f(a)$ и $p_n(x + (\epsilon)) \leqq p_n \cdot \mathrm{e}(\mathcal{E}_n(a))$. Таким образом, участник a принадлежит исключительному множеству из утверждения (III) для $n \leqq \frac{1}{l} \cdot \epsilon$. Доказательство завершено.

Задачи

Задача 1. Доказать теорему 1 без использования того факта, что последовательность (f_n) равномерно интегрируема (т.е. без использования утверждения 1).

Указания. (1) Выбрать непрерывное представление последовательности $\mathcal{E}_n$, существующее согласно утверждению 2(а), § 2.1: $\mathcal{E}(A, \mathcal{A}, \nu) \to \to \mathrm{T}$ и α_n: $A \to A_n$. Пусть $\tilde{f}_n = f_n \circ \alpha_n$. Показать, что почти везде в A $\mathrm{Ls}(f_n(a)) \neq \phi$ (применить к последовательности $|\tilde{f}_n|$ лемму Фату).

(2) Использовать лемму 1 и перейти к подпоследовательности, как это сделано в части (b) доказательства.

(3) Показать, что для каждого $x \in \mathbf{R}^l_+$, для которого $p \cdot x \leqq p \cdot \mathrm{e}(\mathcal{E}(a))$, $x \precsim_{\mathcal{E}(a)} \mathrm{Ls}(\tilde{f}_n(a))$ (аналог свойства (6) доказательства теоремы 1). Вывести из этого факта, что $p > 0$.

(4) Вывести из (3), что последовательность $p \cdot (\tilde{f}_n - \mathrm{e} \circ \mathcal{E})$ сходится по мере к нулю.

(5) Вывести из (3) и (4), что последовательность $(\tilde{f}_n)$ сходится по мере к вальрасовскому дележу $\varphi(\mathcal{E}(a), p)$ (использовать положительность p и показать, что $\mathrm{Ls}(\tilde{f}_n(a)) = \varphi(\mathcal{E}(a), p))$. Завершить доказательство так же, как в части (с) приведенного в тексте доказательства.

Задача 2. Доказать теорему 1 без использования леммы 1.

Указание. Следовать части (а) приведенного в тексте доказательства. Показать, применяя теорему Каннаи (1970), что f является вальрасовским дележом для экономики $\mathcal{E}$. Или, иначе, показать, что f принадлежит c-ядру предельной экономики $\mathcal{E}$, и воспользоваться теоремой 1, § 2.1 (Гродал, 1971, теорема 5).

Задача 3 (обобщение утверждения 2). Пусть Q – компактное подмножество в $\mathbf{R}^l_+$. Установить следующий результат: если последовательность $(\mathcal{E}_n)$ простых экономик с характеристиками из $\mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times Q$ является чисто конкурентной и $f_n \in \mathrm{C}(\mathcal{E}_n)$ $(n = 1, \ldots)$, то последовательность (f_n) ограничена.

Задача 4. Доказать утверждение 1, используя лемму Фату в многомерном пространстве (лемма 3, D.II.4).

Указание. Рассмотреть непрерывное представление последовательности $(\mathcal{E}_n)$. Тогда (утверждение 2, § 2.1) существуют такие экономика

$\mathcal{E}: (A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}_+^l$

и отображение $\alpha_n: A \to A_n$, что $\nu(\alpha_n^{-1}(S)) = \dfrac{|S|}{|A_n|}$, $S \subset A_n$ и $\tilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n \circ \alpha_n \to$ $\to \mathcal{E}$ почти везде на A. Пусть $f_n: = f_n \circ \alpha_n$. Ясно, что

$\int \tilde{f}_n \, d\nu \to \int \mathrm{e} \, d\mu = : \bar{e}$.

Пусть функция $f: A \to \mathbf{R}^l$ такова, что почти везде на $A f(a) \in \mathrm{Ls}(\tilde{f}_n(a))$ и $\int f d\nu \leqq \bar{e}$. Использовать лемму 1 для доказательства того факта, что f является вальрасовским дележом для экономики $\mathcal{E}$. Этот факт доказывается так же, как и в части (b) доказательства теоремы 1, только вместо свойства (6) надо доказать следующее свойство: если $x \geqq 0$ и $p \cdot x <$ $< p \cdot \mathrm{e}(\mathcal{E}(a))$, то почти везде на $A x \not\succ_{\mathcal{E}(a)} f(a)$. Из этого следует, что $p > 0$ и $\int f d\nu = \bar{e}$. После этого применить последнее утверждение леммы 3 из D.II.4.

Задача 5. Дать непосредственное доказательство следствия 3, используя только лемму 1 (Винд, 1965).

Задача 6. Показать на примере, что дележ f из c-ядра экономики не обязательно обладает свойством: если $\mathcal{E}(a) = \mathcal{E}(a')$, то $f(a) \sim f(a')$ или $f(a) = f(a')$, т.е. два участника одного типа могут получать различные наборы товаров или же иметь от них различную полезность (относительно их общего отношения предпочтения).

Пусть $T = \{(\precsim_1, e_1), \ldots, (\precsim_r, e_r)\}$ — конечное множество характеристик (типов) участников, где $\precsim_i$ выпуклы и монотонны, а $e_i > 0$ $(i = 1, \ldots$ $\ldots, r)$. Пусть u_i — функция полезности для отношения $\precsim_i$. Для каждого дележа f экономики $\mathcal{E}: A \to T$ обозначим через $\bar{u}_i(f)$ среднюю полезность типа i, т.е.

$$\bar{u}_i(f) = \frac{1}{|A_i|} \sum_{A_i} u_i(f(a)),$$

где $A_i = \mathcal{E}^{-1}(\precsim_i, e_i)$. Показать (без использования теоремы 1), что для каждого $\epsilon > 0$ и каждого $\eta > 0$ существует такое целое $\bar{n}$, что для каждой экономики $\mathcal{E}: A \to T$, для которой $|A| \geqq \bar{n}$, выполняется неравенство

$$\sup_{f \in C(\mathcal{E})} \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{r} |\{a \in A_i \mid |u_i(f(a)) - \bar{u}_i(f(a))| \geqq \epsilon\}| < \eta.$$

Пусть $\bar{f}_i = \dfrac{1}{|A_i|} \sum\limits_{A_i} f(a)$. Если все отношения предпочтения $\precsim_i$ строго выпуклы, то для каждого $\epsilon > 0$ и каждого $\eta > 0$ существует такое $\bar{n}$, что для каждой экономики $\mathcal{E}: A \to T$, для которой $|A| \geqq \bar{n}$, выполняется неравенство

$$\sup_{f \in C(\mathcal{E})} \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{r} |\{a \in A_i \mid |f(a) - \bar{f}_i| \geqq \epsilon\}| < \eta$$

(Гильденбранд, Кирмен, 1973).

З а д а ч а 7. Обобщить теорему 1 на случай, когда каждая коалиция имеет производственное множество Y, являющееся выпуклым конусом.

З а д а ч а 8. Показать, как упрощаются (и притом весьма значительно) доказательства теорем 1 и 2 в случае, когда $\operatorname{supp} \mu_n = \operatorname{supp} \mu$ есть конечное множество.

З а д а ч а 9. Пусть $\mathscr{M}$ – множество мер на $\mathscr{P}^*_{\substack{\mathrm{mo}\\ \mathrm{sco}}} \times Q$, для которых $\int e\, d\mu > 0$, где Q – ограниченное подмножество в $\mathbf{R}^l_+$. Доказать следующий результат. Для каждого $\epsilon > 0$ существует открытое и плотное в $\mathscr{M}$ подмножество $\mathscr{M}'$, обладающее свойством: если последовательность $(\mathscr{E}_n)$ простых экономик является чисто конкурентной и $\lim \mu_n \in \mathscr{M}'$, то для каждого $f_n \in \mathrm{C}(\mathscr{E}_n)$ существуют такие равновесные цены $p_n \in \Pi(\mathscr{E}_n)$ $(n = 1, \ldots)$, что

$$\frac{1}{|A_n|} \;|\{a \in A_n \mid |f_n(a) - \varphi(\mathscr{E}_n(a), p_n)| \geqq \epsilon\}| \to 0.$$

У к а з а н и е. Использовать теорему 1 и следствие 1 утверждения 4 гл. 2 (Диркер, 1973).

З а д а ч а 10. Установить следующий результат. Пусть последовательность $(\mathscr{E}_n)$ простых экономик с характеристиками в $\mathbf{T} \subset \mathscr{P}_{\mathrm{mo}} \times \mathbf{R}^l_+$ является чисто конкурентной на $\mathbf{T}$. Тогда для каждого $f_n \in \mathrm{C}(\mathscr{E}_n)$ существует такой вектор цен $p_n \in \Pi(\mu)$, что для каждого $\eta > 0$

$$\frac{1}{|A_n|} \;|\{a \in A_n \mid \operatorname{dist}[f_n(a), \dot{\varphi}(\mathscr{E}_n(a), p_n)] \geqq \eta\}| \to 0,$$

где $\dot{\varphi}$ – такое полунепрерывное снизу отображение из $\mathbf{T} \times \Pi(\mu)$ в $\mathbf{R}^l$, что $\varphi(\succ, p \cdot e, p) \subset \dot{\varphi}(\succ, p \cdot e, p)$ для каждого $(\succ, e, p) \in \mathbf{T} \times \Pi(\mu)$. Примеры таких "полунепрерывных снизу расширений" отображения спроса φ приведены в задачах 12 и 13 § 1.2.

Примечания к § 3.3

Первая предельная теорема о c-ядре сформулирована Эджвортом (1881, с. 34–38). Он рассматривал последовательность реплицированных экономик с участниками двух типов и двумя товарами и геометрически показал, что c-ядро, которое он называл "окончательной точкой расчета на договорной прямой", сходится к равновесию Вальраса. Так как этот метод, модифицированный Боули (так называемый *ящик Эджворта – Боули*) и ставший широко распространенным, был геометрическим, он существенно использовал условие о наличии только двух товаров и только двух типов участников. Современное и строгое изложение теоремы Эджворта было предложено Дебре и Скарфом (1972).

Связь между договорной кривой Эджворта и введенным в 1953 г. Джиллисом и Шепли понятием "c-ядра игры" была подмечена Шубиком (1959), который обратил внимание на значение "Математической психологии" Эджворта (1881). Добавив предположение о трансферабельности полезности, Шубик проанализировал предельную теорему Эджворта как для c-ядра, так и для Н–М-решения. Дальнейшее развитие этого круга вопросов с точки зрения теории игр лиц с трансферабельной полезностью было предпринято Шепли (1959, 1964) и Шепли и Шубиком (1969).

Первое обобщение предельной теоремы Эджворта на случай произвольного, но конечного числа товаров и типов участников было сделано Скарфом (1962). Окончательная форма предельной теоремы о c-ядре для реплицированных экономик была предложена Дебре и Скарфом (1963). Их доказательство просто и весьма красиво.

Общий случай нереплицированных экономик стал изучаться только после того, как Ауман (1964) ввел в рассмотрение континуальное множество участников. Первый результат, полученный Каннаи (1970) в статье, которая была известна в рукописи с 1964 г., хотя и имел предварительный характер, но тем не менее стимулировал исследования в этом направлении. В этой статье Каннаи впервые ввел метрику в пространстве предпочтений. Это позволило ввести Гильденбранду (1970) ту систему понятий (например, слабая сходимость распределений в пространстве характеристик участников) и методов (например, непрерывное представление последовательности простых экономик), которые изложены в этой главе. Однако основной результат упомянутой статьи не является столь завершенным, как результаты настоящей главы. Теорема 1 обобщает результат Бьюли (1974). Доказательство теоремы 1 основано на неопубликованной статье Гродала и Гильденбранда. Лемма 1 принадлежит Винду (1965). Следствие 3 и использование при его доказательстве "свойство равного распределения товаров" принадлежат Дебре и Скарфу (1963). Теорема 2, утверждение 2 и лемма 2 принадлежат Бьюли (1974). Бьюли доказал утверждение 2 в предположении строгой выпуклости отношений предпочтения. Тот факт, что это предположение можно опустить, доказал Трокел (1974).

Следует упомянуть три различных способа получения предельных теорем для c-ядра: способ Нишино (1971), способ Эроу – Хана (1971) и способ Брауна – Робинсона (1972). Заключение Нишино аналогично заключению теоремы 2. Однако его система понятий отличается от нашей. Существенное различие между предельной теоремой Эрроу – Хана и теоремой 2 настоящей главы состоит в том, что их предположение касается последовательности пар $(\mathcal{E}_n, f_n)$, а не последовательности $(\mathcal{E}_n)$ одних экономик, как в настоящей главе. Эти предположения трудно поддаются сравнению (см. Бьюли, 1974). Работа Брауна и Робинсона (1972) существенно использует нестандартный анализ. Их предельная теорема является частным случаем как теоремы 1, так и теоремы 3.

ГЛАВА 4

ЭКОНОМИКИ С ПРОИЗВОДСТВОМ

§ 4.1. Введение

В предыдущих главах рассмотрение ограничивалось экономиками чистого обмена: участники коалиции могли лишь перераспределять свои начальные ресурсы. Теперь мы расширим эту модель, вводя в рассмотрение также и возможности производства для каждой коалиции участников. Производственные возможности каждой коалиции S участников экономики описываются некоторым множеством пар затраты – выпуск или производственным множеством Y_S коалиции S. Производственное множество Y_S можно описать некоторым подмножеством в пространстве товаров $\mathbf{R}^l$, если мы примем следующее соглашение: $y \in \in Y_S \subset \mathbf{R}^l$ означает, что коалиция S может произвести вектор выпуска $\max(0, y)$ при условии, что она располагает вектором затрат $\max(0, -y)$ (таким образом, величины затрат представлены отрицательными числами, а величины выпусков – положительными).

Производственное множество Y_S определяется как чисто технологическими возможностями, так и общественными условиями широкого плана. Оно может также зависеть от таких факторов или возможностей участников коалиции, которые не содержатся в списке товаров, определяющем пространство $\mathbf{R}^l$.

Важно понимать, что если вводится какая-либо связь между производственными множествами Y_S и Y_T двух непересекающихся коалиций S и T с производственным множеством $Y_{S \cup T}$ коалиции $S \cup T$ (в предположении, например, что $Y_S + Y_T \subset Y_{S \cup T}$), то тем самым неявно вводятся предположения о природе условий, определяющих производственные множества.

Коалиционная производственная экономика определяется как экономика обмена, в которой, кроме того, для каждой коалиции определено производственное множество.

Соответствие $\mathbf{Y}$, которое каждой коалиции S пространства с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$ участников экономики ставит в соответствие непустое подмножество $\mathbf{Y}(S)$, называется *производственным соответствием.*

Для коалиционной производственной экономики c-ядро определяется аналогично определению 2 из гл. 2. Однако при попытке распространить на коалиционную производственную экономику понятие равновесия по Вальрасу возникает принципиальная трудность. Неясно, вообще говоря, как определить богатство участников экономики. Точнее говоря, если имеется вектор p и если стоимость $p \cdot \bar{y}$ полного производства $\bar{y}$ отлична от нуля, то совершенно не ясно, как следует распределить эту стоимость $p \cdot \bar{y}$ между участниками экономики. Если производственное соответствие $\mathbf{Y}$ аддитивно, то существует простой и вполне определенный способ распределения общего дохода $p \cdot \bar{y}$. В этом случае мы можем определить понятие "равновесие по Вальрасу". Непосредственно из этого определения следует, что каждый вальрасовский дележ принадлежит c-ядру (утверждение 2). Обратно, если коалиционная производственная экономика является неатомической, то каждый дележ из c-ядра является вальрасовским дележом (теорема 1).

Существование вальрасовских дележей для коалиционной производственной экономики устанавливается в теореме 2.

В § 4.3 мы приводим хорошо известные результаты об эффективности по Парето для экономик, множество участников которых есть пространство с мерой.

§ 4.2. Коалиционная производственная экономика

Для того чтобы определить c-ядро экономики с производством, нужно прежде всего определить для каждой коалиции S множество тех пар затраты – выпуск, которые может реализовать коалиция S. Это множество возможных пар затраты – выпуск, или *производственное множество*, можно описать подмножеством Y_S пространства товаров. Величины затрат выражаются отрицательными числами, а величины выпусков – положительными. Если для каждой коалиции S определено ее производственное множество Y_S, то мы приходим к понятию "коалиционная производственная экономика".

Определение 1. Экономика обмена $\mathcal{E}(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l$ вместе с производственным соответствием $\mathbf{Y}: \mathcal{A} \to \mathbf{R}^l$ называется *коалиционной производственной экономикой* и обозначается $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$. Дележ f для экономики $\mathcal{E}$ называется *достижимым* по отношению к полному производственному множеству $\mathbf{Y}(A)$, если

$$\int f d\nu \in \int e d\nu + \mathbf{Y}(A).$$

Подчеркнем, что в коалиционной производственной экономике товары, которые относятся к различным типам труда, становятся существенными, и поэтому множество потребления $X(a)$ участника экономики, как правило, отлично от положительного ортанта.

c-ядро коалиционной производственной экономики. Для коалиционной производственной экономики c-ядро определяется так же, как в гл. 2. Дележ не принадлежит c-ядру, если существует коалиция S, которая, используя свой начальный ресурс $\int_S e$ и свое производственное множество $\mathbf{Y}(S)$, может улучшить положение каждого из своих членов. Таким образом, c-ядро есть такое множество достижимых дележей, что никакая коалиция не может улучшить ни одного из них. Формально мы имеем следующее определение.

Определение 2. Пусть f – дележ для коалиционной производственной экономики $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$. *Коалиция S может улучшить дележ f*, если существует для $\mathcal{E}$ такой дележ g, что:

(I) $g(a) \succ_a f(a)$ почти везде в S;

(II) $\nu(S) > 0$, $\int_S g\, d\nu \in \int_S e\, d\nu + \mathbf{Y}(S)$.

Множество всех достижимых дележей для коалиционной производственной экономики $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$, которые ни одна коалиция из $\mathcal{A}$ улучшить не может, называется *c-ядром экономики* $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$ и обозначается $\mathbf{C}(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$.

Обобщая случай чистого обмена, мы хотим показать, что дележи из ядра большой коалиционной производственной экономики $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$ можно децентрализовать с помощью подходящим образом выбранных цен.

Прежде всего нам потребуется понятие "равновесие", которое распространяет на коалиционную производственную экономику понятие "равновесие по Вальрасу", определенное для экономики обмена в гл. 2. Следовательно, нам нужно определить богатство каждого участника.

Напомним, что количество труда, которое участник экономики собирается предложить, есть часть его плана потребления. Следовательно, в стоимость его плана потребления входит доход от труда.

Если имеется система цен p, то очевидно, что стоимость $p \cdot e_a$ начального капитала участника a составляет часть его богатства. Далее, стоимость $p \cdot \bar{y}$ полного производственного плана может быть отличной от нуля. Тогда эта величина должна быть распределена между участниками из A. Естественно, что коалиция S претендует по меньшей мере на величину $\sup\limits_{y \in Y_S} p \cdot y$, так как при ценах p она может получить эту величину, используя лишь свои производственные возможности. Такое распределение общего дохода может оказаться как возможным, так и невозможным. Для того чтобы избежать всех этих тонких проблем, ограничим наше исследование крайне упрощенным случаем, а именно случаем, когда производственное соответствие $\mathbf{Y}$ аддитивно. Даже если все производственные множества являются конусами (и, таким образом, в равновесии прибыль всегда неположительна) и в определении вальрасовского дележа трудностей не возникает, предположение об аддитивности является основным. Без аддитивности производственного соответствия $\mathbf{Y}$ c-ядро может оказаться строго больше, чем множество вальрасовских дележей для неатомической экономики (см. задачу 1).

Аддитивные производственные соответствия и индивидуальная прибыль. Производственное соответствие $\mathbf{Y}: \mathcal{A} \to \mathbf{R}^l$ называется *аддитивным*, если для каждой последовательности (S_i) попарно непересекающихся элементов из $\mathcal{A}$ выполняется равенство

$$\mathbf{Y}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{Y}(S_i).$$

Для аддитивного производственного соответствия $\mathbf{Y}: \mathcal{A} \to \mathbf{R}^l$, которое абсолютно непрерывно относительно меры ν (т.е. если $\nu(S) = 0$, то $\mathbf{Y}(S) = \{0\}$), богатство участника определяется легко и однозначно. Действительно, положим для каждой коалиции

$$\Pi(S, p) := \sup \{p \cdot y \mid y \in \mathbf{Y}(S)\}.$$

Отображение $\Pi(\cdot, p): \mathcal{A} \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ называется *коалиционным распределением прибыли* при данных ценах p. Легко проверить, что $\Pi(\cdot, p)$ счетно-аддитивно. Кроме того, $\Pi(\cdot, p)$ абсолютно непрерывно относительно меры ν, так как очевидно, что из $\nu(S) = 0$ следует $\Pi(S, p) = 0$. Следовательно, по теореме Радона – Никодима (D.I, (25)) существует такая измеримая функция $\pi(\cdot, p)$ $A \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, что для каждой коалиции $S \in \mathcal{A}$ выполняется равенство

$$\Pi(S, p) = \int_S \pi(\cdot, p)\, d\nu.$$

Эта функция $\pi(\cdot, p): A \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ называется *индивидуальным распределением прибыли;* она определяется коалиционным распределением прибыли $\Pi(\cdot, p)$ с точностью до ν-эквивалентности.

Равновесие по Вальрасу для аддитивной коалиционной производственной экономики. Пусть $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$ – такая коалиционная производственная экономика, что $\mathbf{Y}$ аддитивно и абсолютно непрерывно относительно ν. Пусть $\pi(\cdot, p)$ обозначает индивидуальное распределение прибыли, определенное отображением $\mathbf{Y}$.

Определение 3. Дележ f называется *вальрасовским дележом для коалиционной производственной экономики* $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$, если существуют такие вектор цен $p \in \mathbf{R}^l$, $p \neq 0$, и производственный план $\bar{y} \in \mathbf{Y}(A)$, что:

(a) почти везде в A $f(a)$ есть максимальный элемент по отношению $\succ_a$ в бюджетном множестве $\{x \in X(a) \mid p(x \leqq p \cdot e(a) + \pi(a, p)\}$;

(b) $p \cdot \bar{y} = \max\limits_{y \in \mathbf{Y}(A)} py$;

(c) $\int f d\nu = \int e d\nu + \bar{y}$.

В этом случае тройка $(f, \bar{y}, p)$ называется *равновесием по Вальрасу* в экономике $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$.

Дележ f называется *квазивальрасовским*, если существуют такие вектор цен $p \in \mathbf{R}^l$, $p \neq 0$, и план производства $\bar{y} \in \mathbf{Y}(A)$, что

(a′) п.в. в A $f(a)$ принадлежит бюджетному множеству

$\{x \in X(a) \mid p \cdot x \leqq p \cdot e(a) + \pi(a, p)\}$,

и если $\inf p \cdot X(a) < p \cdot e(a) + \pi(a, p)$, то $f(a)$ является максимальным элементом в бюджетном множестве по отношению $\succ_a$;

(b) $p \cdot \bar{y} = \max\limits_{y \in \mathbf{Y}(A)} p \cdot y$;

(c) $\int f d\nu = \int e d\nu + \bar{y}$.

Мы покажем, что при весьма общих предположениях относительно коалиционной производственной экономики $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$ каждый дележ из ядра является квазивальрасовским (теорема 1) и что квазивальрасовский дележ существует (теорема 2). Показать, что квазивальрасовский дележ на самом деле является вальрасовским, без дополнительных предположений нельзя, так как множество участников, для которых $\inf p \cdot X(a) = p \cdot e(a) + \pi(a, p)$, может иметь положительную меру.

В § 2.2, где предполагалось, что отношения предпочтений монотонны, вектор цен p, соответствующий квазивальрасовскому дележу, был строго положительным. Поэтому, если $\inf p \cdot \mathbf{R}^l_+ = p \cdot e(a)$, то

$\{x \in \mathbf{R}^l_+ \mid p \cdot x \leqq p \cdot e(a)\} = \{0\}$.

Из этого очевидно, что каждый квазивальрасовский дележ является вальрасовским. Для коалиционной производственной экономики ситуация становится более сложной; не каждый товар необходим каждому участнику, и поэтому равновесные цены могут быть равны нулю. Для того чтобы преодолеть эту чисто техническую трудность, мы вводим понятие "неразложимая экономика".

Неразложимая экономика. Коалиционная производственная экономика $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$ называется *неразложимой*, если для каждого разбиения $\{S, T\}$ множества участников $(A, \mathcal{A}, \nu)$, где $0 < \nu(S) < 1$, и для каждого достижимого дележа f существуют такой дележ h и план производства $y \in \mathbf{Y}(T)$, что $\int_T (e - h) d\nu + y + \int_S f d\nu$ принадлежит $\int_S \{x \in X(a) \mid x \succ_a f(a)\} d\nu$.

Неразложимость экономики означает, что потребление $f(a)$ каждого участника коалиции S может быть улучшено, если участники коалиции T объединятся и при этом выживут, т.е. потребят $h(a) \in X(a)$ и произведут $y \in \mathbf{Y}(T)$. Очевидно, что если все товары желательны и если каждый участник обладает по крайней мере одним товаром в положительном количестве, то экономика неразложима.

Утверждение 1. *Пусть* $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$ — *неразложимая коалиционная производственная экономика и* $(f, \bar{y}, p)$ — *квазивальрасовское равновесие для* $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$. *Тогда* $\nu\{a \in A \mid \inf p \cdot X(a) = p \cdot e(a) + \pi(a, p)\}$ *равна либо* 0, *либо* 1.

Доказательство. Пусть $T = \{a \in A \mid \inf p \cdot X(a) = p \cdot e(a) + \pi(a, p)\}$. Предположим, что $0 < \nu(T) < 1$, и положим $S := A \setminus T$. По определению T для каждого дележа h имеем

$$p \cdot \int_T (e - h) + \pi(T, p) \leqq 0. \tag{1}$$

По определению неразложимости существвуют такие дележ h и план производства $y \in \mathbf{Y}(T)$, что

$$\int_T (e - h) + y + \int_S f \text{ принадлежит } \int_S \{x \in X(a) \mid x \succ_a f(a)\}.$$

Таким образом, существует такой дележ f', что

$$\int_S f' = \int_T (e - h) + y + \int_S f \tag{2}$$

и п.в. на S

$$f'(a) \succ_a f(a). \tag{3}$$

Так как f — квазивальрасовский дележ и $S = A \setminus T$, из (3) получаем, что п.в. на S $p \cdot f'(a) > p \cdot f(a)$.

Следовательно,

$$p \cdot \int_S f' > p \cdot \int_S f. \tag{4}$$

Но из (2), (1) и определения $\Pi(T, p)$ получаем

$$p \cdot \int_S f' = p \cdot \int_T (e - h) + p \cdot y + p \cdot \int_S f \leqq p \cdot \int_S,$$

что противоречит (4). Доказательство завершено.

Утверждение 1 показывает, что в неразложимой коалиционной производственной экономике $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$ квазивальрасовский дележ на самом деле является вальрасовским при условии, что мы исключим из рассмотрения особый случай равенства

$$\inf p \cdot \int X = p \cdot \int e + \Pi(A, p).$$

Например, если предположить, что существуют такие общий план потребления $\bar{x} \in \int X$ и общий план производства $\bar{y} \in \mathbf{Y}(A)$, что

$$\bar{\bar{x}} < \int e + \bar{y},$$

то ясно, что если каждый вектор цен p отличен от нуля, то особый случай будет исключен. Приведенное выше неравенство означает, что для данных общего начального ресурса $\int e$ и общего производственного множества $\mathbf{Y}(A)$ экономика может произвести любого потребительского блага несколько больше, чем это необходимо для выживания всех участников, и это возможно даже в том случае, когда в производстве товаров не используются как малые количества каждого вида труда, например минута, так и малые количества других первичных факторов.

с-ядро и вальрасовские дележи. Как и в случае экономики обмена, непосредственно из определений 2 и 3 следует, что каждый вальрасовский дележ принадлежит c-ядру.

Утверждение 2. *Каждый вальрасовский дележ экономики* $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$ *принадлежит ее с-ядру.*

Доказательство. Пусть f — вальрасовский дележ, не принадлежащий ядру $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$. Тогда существует коалиция S, которая может улучшить f, т.е. в $\mathcal{E}$ существует такой дележ g, что:

(I) почти везде в S $g(a) \succ_a f(a)$;

(II) $\nu(S) > 0$, $\int_S g \in \int_S e + \mathbf{Y}(S)$.

Ввиду (I) и определения вальрасовского дележа существует такой вектор цен $p \in \mathbf{R}^l$, $p \neq 0$, что почти везде в S

$$p \cdot e(a) + \pi(a, p) < p \cdot g(a).$$

Следовательно, $\Pi(S, p) = \int_S \pi(\,\cdot\,, p) < p \cdot \int_S (g - e)$. Но так как $\int_S (g - e) \in$ $\in \mathbf{Y}(S)$, последнее неравенство противоречит определению $\Pi(S, p)$. Доказательство завершено.

Перейдем теперь к более трудному включению. Мы покажем, что в неатомической и аддитивной коалиционной производственной экономике каждый дележ из c-ядра можно децентрализовать подходящим образом выбранным вектором цен.

Теорема 1. *Пусть коалиционная производственная экономика такова, что выполнены следующие условия:*

(α) *экономика* $\mathcal{E}$: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}_{\text{lns}} \times \mathbf{R}^l$ *является неатомической;*

(β) *соответствие* $\mathbf{Y}$: $\mathcal{A} \to \mathbf{R}^l$ *аддитивно, выпуклозначно и абсолютно непрерывно относительно* ν.

Тогда каждый дележ из с-ядра экономики $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$ *является квазивальрасовским.*

Доказательство. Пусть дан дележ f из c-ядра экономики $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$; определим соответствие ψ: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathbf{R}^l$, положив

$$\psi(a) := \{x \in \mathbf{R}^l \mid x + e(a) \succ_a f(a)\}.$$

Аналогично доказательству теоремы 1, § 2.2 можно показать, что график соответствия ψ измерим. Так как f интегрируема и отношения предпочтений локально ненасыщенны, из теоремы об измеримом селекторе (теорема 1, D.II.2) следует, что $\mathcal{L}_\psi \neq \phi$.

Так как производственное соответствие $\mathbf{Y}$: $\mathcal{A} \to \mathbf{R}^l$ аддитивно, выпуклозначно и абсолютно непрерывно относительно ν, из теоремы 8(D.II.4), следует, что существует такое соответствие η: $A \to \mathbf{R}^l$, что для каждого $S \in \mathcal{A}$ выполняются условия

$$\int_S \eta \subset \mathbf{Y}(S),$$

$$\mathrm{cl}\,(\int_S \eta) = \mathrm{cl}\,(\mathbf{Y}(S)).$$

Рассмотрим теперь множество $Z \subset \mathbf{R}^l$, определенное следующим образом:

$$Z := \bigcup_{\{S \in \mathcal{A} \mid \nu(S) > 0\}} \left(\int_S \psi - \int_S \eta\right).$$

Так как пространство с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$ неатомично, из теоремы Ляпунова следует, что множество Z выпукло (предложение 5, D.II.4).

Покажем, что $0 \notin Z$. Действительно, в противном случае существовали бы такое множество $S \in \mathcal{A}$, где $\nu(S) > 0$, и функция $g \in \mathcal{L}_\psi$, что

$$\int_S g \in \int_S \eta \subset \mathbf{Y}(S).$$

Но тогда коалиция S могла бы улучшить дележ f, так как дележ $h = g + e$ обладает свойствами

$$\int_S h \in \mathbf{Y}(S) + \int_S e, \quad h(a) \succ_a f(a) \quad \text{почти везде в } S,$$

а это противоречит предположению о том, что f принадлежит c-ядру экономики $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$.

По теореме об отделимости (C.I, (11)) существует такой вектор $p \in \mathbf{R}^l$, $p \neq 0$, что для каждого $z \in Z$

$$0 \leqq p \cdot z.$$

Следовательно, для каждого $S \in \mathcal{A}$ и для каждых $y \in \int_S \eta$ и $x \in \int_S \psi$ имеем неравенство $p \cdot y \leqq p \cdot x$. Так как $\mathrm{cl}(\int_S \eta) = \mathrm{cl}(\mathbf{Y}(S))$, для каждого $S \in \mathcal{A}$ получаем

$$p \cdot \mathbf{Y}(S) \leqq \Pi(S, p) \leqq p \cdot \int_S \psi.$$

Итак, поскольку $\mathcal{L}_\psi \neq \phi$, мы доказали следующие утверждения:

(1) $\Pi(A, p) < \infty$ и, следовательно, $\pi(\cdot, p)$ является интегрируемой функцией из A в $\mathbf{R}$ (D.I, (25));

(2) для каждого $S \in \mathcal{A}$ $\quad \Pi(S, p) \leqq \inf\{p \cdot x \mid x \in \int_S \psi\}$.

Докажем теперь, что из (2) следует утверждение

(3) почти везде в A для каждого $x \in \psi(a)$ $\quad \pi(a, p) < p \cdot x$, т.е. для каждого $x \succ_a f(a)$

$$p \cdot e(a) + \pi(a, p) < p \cdot x.$$

Действительно, так как операции взятия инфимума и интегрирования можно поменять местами (D.II.4, утверждение 6), мы имеем

$$\inf\{p \cdot x \mid x \in \int_S \psi\} = \int_S (\inf p \cdot \varphi).$$

Следовательно, из (2) получаем, что для каждого $S \in \mathcal{A}$ выполняется неравенство

$$\int_S \pi(\cdot, p) = \Pi(S, p) \leqq \int_S (\inf p \cdot \varphi),$$

из которого следует (3).

Покажем теперь, что $f(a)$ принадлежит бюджетному множеству, т.е. что почти везде в A выполняется неравенство $p \cdot f(a) \leqq p \cdot e(a) + \pi(a, p)$.

Так как отношения предпочтений локально ненасыщенны, из (3) следует, что почти везде в A

$$p \cdot e(a) + \pi(a, p) \leqq p \cdot f(a).$$

Далее, если существует такое множество M, что $\nu(M) > 0$ и для всех $a \in M$ $p \cdot e(a) + \pi(a, p) < p \cdot f(a)$, то

$$p \cdot \int_A e + \Pi(A, p) < p \int_A f$$

и, следовательно,

$$p \cdot \int_A (f - e) > \Pi(A, p).$$

Но так как $\int_A (f - e) \in \mathbf{Y}(A)$, последнее неравенство противоречит определению $\Pi(A, p)$.

Таким образом, мы показали, что $f(a)$ принадлежит бюджетному множеству и что каждый $x \succ_a f(a)$ стоит не меньше, чем стоит $f(a)$. Теперь обычными рассуждениями можно показать, что если $\inf p \cdot X(a) < p \cdot e(a) + \pi(a, p)$, то дележ $f(a)$ на самом деле является максимальным элементом в бюджетном множестве.

Покажем, наконец, что $\int_A (f - e)$ максимизирует прибыль на $\mathbf{Y}(A)$. Действительно, мы показали, что почти везде в A

$$p \cdot f(a) = p \cdot e(a) + \pi(a, p)$$

и, следовательно,

$$p \cdot \int_A (f - e) = \Pi(A, p).$$

Доказательство завершено.

Существование вальрасовских дележей.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

(α) *Экономика* $\mathcal{E}$: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}_{\mathrm{ins}} \times \mathbf{R}^l$ *является выпуклой.*

(β) *Производственное отображение* $\mathbf{Y}: A \to \mathbf{R}^l$ *аддитивно и абсолютно непрерывно относительно* ν; *для каждого* $S \in \mathcal{A}$ *множество* $\mathbf{Y}(S)$ *выпукло и содержит* 0; *общее производственное множество* $\mathbf{Y}(A)$ *замкнуто*; $\mathbf{Y}(A) \cap \cap \mathbf{R}^l_+ = \{0\}$ (*невозможность производства без затрат*); $\mathbf{Y}(A) \cap (-\mathbf{Y}(A)) = \{0\}$ (*необходимость производства*); *если* $x \leqq y$ *и* $x, y \in \int X$, *то* $x - y \in \mathbf{Y}(A)$ (*возможность свободного уничтожения потребительских благ*).

(γ) $(e(a) + \mathbf{Y}(A)) \cap X(a) \neq \phi$ (*совместимость индивидуальных потребностей и ресурсов с общими производственными возможностями*).

Тогда в коалиционной производственной экономике $(\mathcal{E}, \mathbf{Y})$ *существует квазивальрасовский дележ.*

Замечание. Если пространство с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$ является простым, т.е. $|A| < \infty$, то предположение о возможности свободного уничтожения потребительских благ не требуется. В этом случае необходимо только предполагать, что множество $\mathbf{Y}(A)$ не ограничено.

Доказательство. Идея доказательства проста: для вектора цен p рассматривается множество избыточного спроса $Z(p)$ и затем делается попытка применить теорему о неподвижной точке (C.III, (15)) к отображению Z. Однако здесь возникают принципиальные трудности. Нет никаких причин для того, чтобы равновесный вектор цен был строго положительным или хотя бы неотрицательным. Мы знаем только, что равновесный вектор цен, если он вообще существует, принадлежит поляре асимптотического конуса множества $\mathbf{Y}(A)$. Действительно, поскольку $\mathbb{A}\mathbf{Y}(A) \subset \mathbf{Y}(A)$ (C.III, (8)), это следует из условия (B) определения 3. Итак, положим

$$P := (\mathbb{A}\mathbf{Y}(A))^0.$$

Но для вектора цен $p \in P$ бюджетное множество может быть неограниченным, и, следовательно, множество спроса может оказаться пустым. Кроме того, так как общее производственное множество неограничено, отображение

$$\psi(p) := \{y \in \mathbf{Y}(A) \mid p \cdot y = \max p \cdot \mathbf{Y}(A)\}$$

может не быть полунепрерывным сверху на P.

Для того чтобы преодолеть эти трудности, нужно усечь множества потребления и производственные множества, а затем осуществить предельный переход. К сожалению, этот путь несколько усложняет доказательство.

Мы хотим сузить производственное соответствие $\mathbf{Y}$ таким образом, чтобы суженное отображение по-прежнему оставалось аддитивным. По-видимому, наиболее простой способ осуществить это сужение состоит в том, чтобы воспользоваться теоремой Радона–Никодима (теорема 8, D.II.4) и затем сузить производную $\mathbf{Y}$.

Так как производственное соответствие $\mathbf{Y}\colon \mathcal{A} \to \mathbf{R}^l$ предполагается аддитивным, выпуклозначным и абсолютно непрерывным относительно меры ν, существует (теорема 8, D.II.4) такое выпуклое и замкнутозначное соответствие $\eta\colon A \to \mathbf{R}^l$ с измеримым графиком, что для каждого $S \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{cl}\left(\int_S \eta\right) = \mathrm{cl}(\mathbf{Y}(S)).$$

Таким образом, $\Pi(S, p) := \sup p \cdot \mathbf{Y}(S) = \sup p \cdot \int_S \eta$. Но имеет место равенство $\sup p \cdot \int_S \eta = \int_S \sup p \cdot \eta$ (предложение 6, D.II.4). Следовательно, $\sup p \cdot \eta$ есть производная Радона–Никодима для $\Pi(\cdot, p)$, и для индивидуального распределения прибыли мы получаем почти везде в A

$$\pi(a, p) = \sup p\, \eta(a).$$

Так как по предположению $0 \in \mathbf{Y}(S)$, мы получаем $\Pi(S, p) \geqslant 0$, и, следовательно, почти везде в A $\pi(a, p) \geqq 0$. Далее, так как $\pi(a, p) = \sup p \cdot \eta(a)$ и $\eta(a)$ замкнуто и выпукло, должно быть $0 \in \eta(a)$.

Определим теперь для каждого целого $k = 1, \ldots$ и каждого участника $a \in A$ *усеченное множество потребления* $X_k(a)$ равенством

$$X_k(a) := X(a) \cap k\,[\{x \in \mathbf{R}^l \mid x^h \leqq |e(a)| + 1\ (h = 1, \ldots, e)\} + \mathbb{A}\mathbf{Y}(A)]$$

и *усеченное производственное множество* $\eta_k(a)$ равенством

$$\eta_k(a) := \{y \in \eta(a) \mid -k \leqq y^h \leqq k \quad (h = 1, \ldots, l)\}.$$

Мы определяем усечение множества потребления столь сложным способом для того, чтобы для каждого k выполнялось условие

$$(\gamma)_k \quad (e(a) + AY(A)) \cap X_k(a) \neq \phi,$$

которое следует из условия (γ) и которое нам потребуется ниже.

Заметим, что усеченное множество потребления $X_k(a)$ ограниченно; это следует на основании теоремы 10 из С.II и из предположения о том, что $Y(A) \cap \mathbf{R}^l_+ = \{0\}$.

Сужение отношения $\succ_a$ на усеченное множество потребления $X_k(a)$ будет снова обозначаться $\succ_a$.

Для отображения $\eta_k : A \to \mathbf{R}^l$ и вектора цен $p \in P$ определим *распределение благосостояния* равенством

$$w_k(a, p) := p \cdot e(a) + \max\{p \cdot \eta_k(a)\}.$$

Функция $w_k(\cdot, p) : A \to \mathbf{R}$ измерима (предложение 3, D.II.3), а функция $w_k(a, \cdot) : P \to \mathbf{R}$ непрерывна (следствие теоремы 3, B.III). Далее, так как $0 \in \eta_k(a)$, из свойства $(\gamma)_k$ следует, что для каждого $p \in P$ почти везде в A выполняется неравенство

$$\inf p \cdot X_k(a) \leqq w_k(a, p),$$

и, следовательно, усеченное бюджетное множество непусто, т.е.

(1) для каждого $p \in P$ почти везде в A $\{x \in X_k(a) \mid p \cdot x \leqq w_k(a, p)\} \neq \phi$.

Обозначим через $\tilde{\Phi}_k(p)$ средний квазиспрос в усеченной экономике, т.е. положим

$$\tilde{\Phi}_k(p) := \int \tilde{\varphi}(X_k(\cdot), \succ, w_k(\cdot, p), p), \quad p \in P.$$

Покажем, что

(2) $\tilde{\Phi}_k(p)$ — непустое, выпуклое, компактное множество, а соответствие $\tilde{\Phi}_k : P \to \mathbf{R}^l$ полунепрерывно сверху.

Из (1) следует, что индивидуальное множество квазиспроса*)

$$\tilde{\varphi}(X_k(a), \succ_a, w_k(a, p), p)$$

непусто. Так как функция $w_k(a, \cdot)$ непрерывна (следствие 2 утверждения 3, § 1.2), для фиксированного участника $a \in A$ соответствие квазиспроса $\tilde{\varphi}$ замкнуто как функция p. Так как $\tilde{\varphi}$ интегрально ограничено (причем равномерно по $p \in P$), мы можем применить утверждение 8, D.II.4. В результате получим, что средний квазиспрос $\tilde{\Phi}_k(\cdot)$ замкнут в каждой точке $p \in P$. Нетрудно показать, что при фиксированном векторе цен $p \in P$ соответствие квазиспроса $\tilde{\varphi}$ имеет измеримый график. Поэтому из теоремы 2, D.II.4 следует, что интеграл $\tilde{\Phi}_k(p)$ непуст. Так как соответствие $\tilde{\Phi}_k(p)$ принимает значения из ограниченного множества $\int X_k$, это означает, что $\Phi_k(p)$ компактнозначно и полунепрерывно сверху. Наконец, выпуклость $\Phi_k(p)$ следует из теоремы 3, D.II.4 и предположения о том, что отношения предпочтений выпуклы на атомах пространства участников $(A, \mathcal{A}, \nu)$.

---

*) То есть множество потребительских наборов в усеченной экономике, удовлетворяющее условию (a′) определения 3. (*Примеч. пер.*)

Положим

$\psi_k(p) := \{ y \in \int \eta_k \mid p \cdot y = \max p \cdot \int \eta_k \}, \quad p \in P.$

Интеграл $\int \eta_k$ от выпуклозначного и замкнутозначного соответствия η_k является непустым, выпуклым и компактным множеством (теорема 2 и предложение 7, D.II.4). Кроме того, соответствие ψ_k выпуклозначно и замкнуто при каждом $p \in P$ (следствие теоремы 3 из B.III).

Итак, мы доказали следующее свойство отображения ψ_k:

(3) соответствие ψ_k: $P \to \mathbf{R}^l$ выпуклозначно, компактнозначно и полунепрерывно сверху.

Рассмотрим теперь средний избыточный спрос Z_k в усеченной экономике, т.е.

$Z_k(p) := \tilde{\Phi}_k(p) - \int e - \psi_k(p), \quad p \in P.$

Мы имеем:

(4) соответствие Z_k из $P \to \mathbf{R}^l$ выпуклозначно, компактнозначно и полунепрерывно сверху;

(5) для каждого $p \in P_2$ должно быть $p \cdot Z_k(p) \leqq 0$.

Действительно, свойство (4) следует из свойств (2), (3) и предложения 5, B.III.

Нам остается показать, что $p \cdot Z_k(p) \leqq 0$. Пусть $z \in Z_k(p)$, т.е.

$z = \int f - y - \int e,$

где $f(a) \in \tilde{\varphi}(X_k(a), \succ_a, w_k(a, p), p)$ и $y \in \psi_k(p)$. Далее, почти везде в A выполняются условия

$p \cdot f(a) \leqq p \cdot e(a) + \max p \cdot \eta_k(a)$ и $p \cdot y = \max p \cdot \int \eta_k$.

Таким образом,

$p \cdot \int f \leqq p \cdot \int e + \int \max p \cdot \eta_k(a)$.

Согласно предложению 6, D.II.4, имеем равенство $\max p \cdot \int \eta_k = \int \max p \cdot \eta_k$. Следовательно, $p \cdot z \leqq 0$, что и доказывает свойство (5).

Ввиду предположения о необратимости производства P не является линейным подпространством.

Поэтому мы можем к соответствию Z_k: $P \to \mathbf{R}^l$ применить теорему о неподвижной точке (C.II, (15)). Это значит, что существует такой вектор $p_k \in P$ $(|p_k| = 1)$, что $Z_k(p_k) \cap P^0 \neq \phi$. Следовательно, существуют такие дележ f_k и вектор $y_k \in \mathbf{Y}(A)$, что:

(6) почти везде в A $f_k(a) \in \tilde{\varphi}(X_k(a), \succ_a, w_k(a, p_k), p_k)$;

(7) $p_k \cdot y_k = \max p_k \cdot \int \eta_k$;

(8) $\int f_k - \int e - y_k \in AA\mathbf{Y}(A)$.

При выводе свойства (8) использован тот факт, что $P^0 = (AA\mathbf{Y}(A))^{00} = AA\mathbf{Y}(A)$ (C.II, (12)).

Теперь докажем следующее свойство:

(9) последовательности $(\int f_k d\nu)$ и (y_k) ограничены.

Согласно (8), мы имеем $\int f_k \in \int X \cap \int e + \mathbf{Y}(A) + P^0$. Таким образом, ввиду C.II, (10) необходимо показать, что

$(\int X) \cap AA(\int e + \mathbf{Y}(A) + P^0) = \{0\}.$

Из ограниченности снизу $\int X$ следует, что $AA(\int X) \subset \mathbf{R}^l_+$. Так как $AA\mathbf{Y}(A) =$

$=P^0$, из C.II, (7) и C.II, (8) вытекает, что $(\int e + \mathbf{Y}(A) + P^0) = \mathbf{AY}(A)$. Наконец, так как по предположению $\mathbf{R}^l_+ \cap \mathbf{Y}(A) = \{0\}$, должно быть $\mathbf{R}^l_+ \cap \cap\ \mathbf{AY}(A) = \{0\}$. Следовательно, последовательность $(\int f_k dv)$ ограничена.

Для того чтобы показать ограниченность последовательности (y_k), используем снова свойство (8), из которого получаем

$$y_k \in \mathbf{Y}(A) \cap \int f_k - \int e - \mathbf{AY}(A).$$

Как и раньше, используя тот факт, что $\mathbf{Y}(A) \cap (-\mathbf{AY}(A)) = \{0\}$, легко показать, что пересечение асимптотических конусов равно $\{0\}$.

Так как последовательности $(\int f_k)$, y_k и p_k ограничены, не умаляя общности, можно предположить, что они сходятся:

$$\int f_k \to b, \quad y_k \to \bar{y}, \quad p_k - p^*, \quad p^* \neq 0.$$

Так как общее производственное множество предполагается замкнутым, должно быть $y_k \in \mathbf{Y}(A) = \mathrm{cl} \int \eta$, и потому $\bar{y} \in \mathbf{Y}(A)$. Кроме того,

(10) $p^* \cdot \bar{y} = \max p^* \cdot \mathbf{Y}(A)$.

Действительно, в противном случае нашелся бы такой вектор $y \in \mathbf{Y}(A)$, что $p^* \cdot \bar{y} \leqslant p^* \cdot y$. Так как $y \in \mathbf{Y}(A) = \mathrm{cl} \int \eta$, существует такая последовательность $\{g_q\}$ ограниченных функций из $\mathcal{L}_\eta$, что $y = \lim\limits_q \int g_q$. Таким образом, для достаточно больших k $\int g_q$ принадлежит $\int \eta_k$. Но для достаточно больших q и k имеет место неравенство $p_k \cdot y_k \leqslant y_k \cdot \int g_q$, которое противоречит (7).

Положим

$$\pi_k(a) := \sup\{p_k \cdot y \mid y \in \eta_k(a)\}, \quad a \in A,$$

и покажем, что

(11) существует такая подпоследовательность последовательности $(\pi_k(\cdot))$, которая сходится почти везде на A к $\pi(\cdot, p^*)$.

Как показано выше, $\pi(a, p^*) = \sup\{p^* \cdot y \mid y \in \eta(a)\}$. Теперь легко проверить, что

(12) $\pi(a, p^*) \leqq \liminf\limits_k \pi_k(a)$.

Следовательно, по лемме Фату (D.I, (19))

$$\int \pi(\cdot, p^*) \leqq \int \liminf_k \pi_k \leqq \liminf_k \int \pi_k.$$

Ввиду предложения 6, D.II.4 и свойства (7), кроме того, имеем

$$\int \sup p_k \cdot \eta_k = \sup p_k \cdot \int \eta_k = p_k \cdot y_k.$$

Но последовательность $(p_k \cdot y_k)$ сходится к $p^* \cdot \bar{y}$, а ввиду свойства (10) и утверждения 6, D.II.4 последняя величина равна $\max p^* \cdot \mathrm{cl} \int \eta = \int \sup p^* \cdot \eta = \int \pi(a, p^*)$. Таким образом, должно быть

$$\int \pi(\cdot, p^*) = \int \liminf_k \pi_k,$$

откуда с учетом (12) следует, что почти везде в A

$$\pi(a, p^*) = \liminf_k \pi_k(a).$$

Свойство (11) теперь следует из теоремы Шеффе (D.I, (22)), поскольку

$$\int \liminf_k \pi_k = \lim_k \int \pi_k.$$

Так как последовательность (f_k) равномерно ограничена снизу и так как $\int f_k \to b$, можно применить лемму Фату в многомерном пространстве (лемма 3, D.II.4). Таким образом, существует такая функция $f^*: A \to \mathbf{R}^l$, что почти везде в A

$$f^*(a) \in \mathrm{Ls}(f_k(a)), \quad \int f^* \leqq b.$$

Оставшуюся часть доказательства составляет проверка того факта, что f^* – квазивальрасовский дележ.

Так как почти везде в A

$$f_k(a) \in \overline{\varphi}\,(X_k(a), \succ_a, w_k(a, p_k), p_k),$$

$$w_k(a, p_k) \to p^* \cdot e(a) + \pi(a, p^*),$$

из замкнутости отношения квазиспроса (следствие 2 утверждения 3 § 1.2) следует, что почти везде в A

$$f^*(a) \in \widetilde{\varphi}(X(a), \succ_a, w(a, p^*), p^*).$$

Для завершения доказательства остается показать, что план производства

$$y^* := \int f^* - \int e$$

максимизирует прибыль на $\mathrm{Y}(A)$. Положим $z = \int f^* - \overline{y} - \int e$, так что $y^* = \overline{y} + z$, и покажем, что $p^* \cdot z = 0$.

Из локальной ненасыщенности отношений предпочтения следует, что почти везде в A

$$p^* \cdot f^*(a) = p^* \cdot e(a) + \pi(a, p^*).$$

Следовательно,

$$p^* \quad z = \int p^* \cdot f^* - p^* \cdot \overline{y} - p^* \int e = \int \sup p^* \cdot \eta - \sup p^* \cdot \int \eta = 0.$$

Ввиду (10) из этого равенства следует, что $p^* \cdot y^* = \sup p^* \cdot \mathrm{Y}(A)$. Остается показать, что $y^* \in \mathrm{Y}(A)$. Так как $\overline{y} \in \mathrm{Y}(A)$, достаточно показать, что $z \in$ AAY(A). Тогда

$$z = (\lim \int f_k - \overline{y} - \int e) - (\lim \int f_k - \int f^*).$$

Первое слагаемое правой части принадлежит AAY(A) согласно (8). Вектор $(\lim \int f_k - \int f^*)$ не меньше нуля, а его положительная координата должна быть потребительским благом. Из предположения о возможности свободного уничтожения потребительских благ следует, что

$$-(\lim \int f_k - \int f^*) \in \mathrm{AAY}(A),$$

и, следовательно,

$$z \in \mathrm{AAY}(A).$$

Заметим, что для простого пространства с мерой имеет место равенство $(\lim \int f_k - \int f^*) = 0$; следовательно, в этом случае нет необходимости предполагать возможность свободного уничтожения потребительских благ. Доказательство завершено.

З а д а ч а 1. Доказать, что для неатомической коалиционной производственной экономики, не являющейся аддитивной, c-ядро может быть строго больше, чем множество вальрасовских дележей.

У к а з а н и е. $A = [0, 1]$. Пространство товаров есть $\mathbf{R}^2$. Начальный капитал постоянен на A и $\int_A e\,d\lambda = (2, 0)$. Отношения предпочтений определяются следующей функцией полезности: если $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, то

$$u_a(x) := \begin{cases} \min\left\{\frac{3}{2}x^1, x^2 + \frac{1}{2}\right\}, & \text{если } x^1 \geqq \frac{1}{2},\ x^2 \geqq \frac{1}{4}, \\ 3\min\left\{\frac{1}{2}x^1, x^2\right\} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а если $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, то

$$u_a(x) := \min\{x^1, x^2\}.$$

Производственное соответствие $\mathbf{Y}\colon \mathcal{B}[0, 1] \to \mathbf{R}^2$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{Y}(S) = \left\{ y \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \begin{array}{l} y \leqq (-z^1, z^2),\ z^1 \geqq 0,\ z^2 \geqq 0, \\ z^2 = 2 \cdot \lambda\left(S \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \cdot z^1 \end{array} \right\}.$$

(1) Соответствие $\mathbf{Y}$ не является аддитивным.

(2) Тройка $f\colon A \to \mathbf{R}^2_+$, где $f(a) = (1, 1)$, $p = (1, 1)$ и $y = (-1, 1)$, есть единственное равновесие по Вальрасу.

(3) Дележ $g\colon A \to \mathbf{R}^2_+$, где $g(a) = (0, 0)$ для $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $g(a) = (2, 2)$ для $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, принадлежит ядру (Бём, 1973).

З а д а ч а 2. Пусть C – выпуклый конус с вершиной 0 в $\mathbf{R}^{l+m}$. Будем рассматривать C как производственное множество, доступное любой коалиции экономики $\mathcal{E}$. Предположим далее, что для товаров h $(l < h \leqq m)$ нет рынка. Пусть $\tilde{e}(a) \in \mathbf{R}^m$ – начальный вектор этих товаров, которыми владеет участник a. Эти начальные ресурсы находятся в индивидуальном владении и не подлежат обмену.

Производственное множество $\mathbf{Y}(S)$ коалиции S в пространстве товаров $\mathbf{R}^l$ определяется сечением

$$\mathbf{Y}(S) = \{y \in \mathbf{R}^l \mid (y, \int_S \tilde{e}\,d\nu) \in C\}.$$

Показать, что так определенное производственное отображение супераддитивно, т.е. для любых двух непересекающихся коалиций выполняется включение $\mathbf{Y}(S) + \mathbf{Y}(T) \subset \mathbf{Y}(S \cup T)$. Если $m > 1$, то $\mathbf{Y}$ может оказаться неаддитивным.

З а д а ч а 3 (существование равновесия по Вальрасу в экономике с частной собственностью). Предположим, что имеется фиксированная совокупность производственных единиц, каждая из которых представляется производственным множеством Y_j, и что прибыли этих производственных единиц распределяются между потребителями определенным образом. Это приводит к понятию экономики с частной собственностью, которая формально определяется как набор

$$[\mathcal{E} : (A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P} \times \mathbf{R}^l, Y_1, \dots, Y_n, \theta_1, \dots, \theta_n],$$

где $Y_j \subset \mathbf{R}^l$ – производственное множество j-й производственной единицы, а $\theta_j : A \to \mathbf{R}$ – интегрируемая функция, для которой $\int \theta_j d\nu = 1$; эта функция описывает долевое распределение прибыли j-й производственной единицы между потребителями. Доказать следующую теорему.

Пусть экономика с частной собственностью обладает следующими свойствами:

(α) *Отображение* $\mathcal{E}: (A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}_{\text{ins}} \times \mathbf{R}^l$ *выпукло*;

(β) $0 \in Y_j$ (*возможность бездействия*);

совокупное производственное множество $Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ *замкнуто и выпукло*;

$Y \cap \mathbf{R}^l_+ = \{0\}$ (*невозможность производства без затрат*);

$Y \cap (-Y) = \{0\}$ (*необратимость производства*).

(γ) *Если* $x \leqq y$ *и* $x, y \in \int X$, *то* $x - y \in$ $\mathcal{A}\mathbf{Y}(A)$ (*возможность свободного уничтожения потребительских благ*) *и* $(e(a) + \mathcal{A}\mathbf{Y}) \cap X(a) \neq \phi$.

Тогда существует квазивальрасовское равновесие, т.е. такие дележ f *в* $\mathcal{E}$, *план производства* $y_j \in Y_j$ $(j = 1, \dots, n)$ *и вектор цен* $p \in \mathbf{R}^l$, $p \neq 0$, *что*:

(a) *почти везде в* A $f(a)$ *принадлежит бюджетному множеству*

$$\{x \in X(a) | p \cdot x \leqq p \cdot e(a) + \sum_{j=1}^{n} \theta_j(a) \cdot \sup p \cdot Y_j\},$$

и если выполняется неравенство

$$\inf p \cdot X(a) \leqslant p \cdot e(a) + \sum_{j=1}^{n} \theta_j(a) \cdot \sup p \cdot Y_j,$$

то $f(a)$ *является максимальным элементом в бюджетном множестве в смысле отношения* $\succ_a$;

(b) $p \cdot y_j = \max p \cdot Y_j$;

(c) $\int f = \int e + \sum_{j=1}^{n} y_j$.

Указание. Пусть

$$\eta(a) := \sum_{j=1}^{n} \theta_j(a) \overline{\text{conv}}\, Y$$

($\overline{\text{conv}}$ обозначает замкнутую выпуклую оболочку) и

$$Y(S) = \int_S \eta(a).$$

Показать, что так определенная коалиционная производственная экономика имеет те же самые общее производственное множество и функцию распределения благосостояния, что и данная экономика с частной собственностью, т.е.

$$\int \eta = \sum_{j=1}^{n} Y_j,$$
$$\sup p \cdot \eta(a) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j(a) \cdot \sup p \cdot Y_j.$$

(Использовать для этого задачу 5, D.II.4.) После этого применить теорему 2. Другими словами, доказать эту теорему непосредственно, используя те же методы, что и при доказательстве теоремы 2.

Примечания к § 4.2

c-ядро для экономики с производством впервые было определено Дебре и Скарфом (1963). Они предполагали, что каждая коалиция имеет одно и то же производственное множество, которое является выпуклым конусом. Это предположение было обобщено Скарфом в двух неопубликованных статьях (1963а, 1963b). Материал этого параграфа взят из статей Гильденбранда (1968, 1970b).

В этом параграфе мы рассматривали исключительно коалиционную производственную экономику с аддитивным производственным отображением. Неаддитивный случай значительно труднее (как в отношении системы понятий, так и в отношении применяемых методов). В этом направлении недавно были получены результаты Эрроу и Ханом (1971), Бёмом (1972), Шамсором (1972), Одду (1972), Зондерманом (1974).

§ 4.3. Дележи, эффективные по Парето

Экономика с неопределенной собственностью. В этом параграфе мы рассмотрим экономику, в которой не определена индивидуальная собственность на начальный капитал и производственные возможности. Каждый участник экономики a описывается своим множеством потребления $X(a)$ и своим отношением нестрогого предпочтения $\precsim_a$. Полный начальный ресурс обозначается e, а полное производственное множество – Y. Таким образом, экономика определяется тройкой

$$(E, e, Y),$$

где E – измеримое отображение измеримого пространства $(A, \mathcal{A}, \nu)$ в пространство нестрогих отношений предпочтения $\mathcal{P}^*$, $e \in \mathbf{R}^l$ и $Y \subset \mathbf{R}^l$.

Дележом в экономике (E, e, Y) называется такое интегрируемое отображение $f: A \to \mathbf{R}^l$, что почти везде в A $f(a) \in X(a)$.

Дележ называется *допустимым*, если существует такой план производства $y \in Y$, что $\int f \, d\nu \leq e + y$, иначе говоря, общий средний спрос не больше общего среднего предложения. Множество всех допустимых дележей экономики (E, e, Y) обозначается через F.

Имеется очевидное и естественное упорядочение дележей, а именно упорядочение по единогласию. Иначе говоря, мы полагаем $f \precsim_A g$ тогда и только тогда, когда почти везде в A $f(a) \precsim_a g(a)$. Бинарное отношение рефлексивно и транзитивно (но, конечно, не полно) и называется *упорядочением по Парето*.

Дележи, эффективные по Парето.

Определение 4. Допустимый для экономики (E, e, Y) дележ называется *эффективным по Парето*, если он является максимальным элементом по отношению $\precsim_A$ во множестве $\mathbf{F}$ всех допустимых для (E, e, Y) дележей.

Теорема 3. *Пусть экономика* (E, e, Y) *такова, что полное производственное множество* Y *замкнуто и* $\mathrm{AA}Y \cap \mathbf{R}^l_+ = \{0\}$. *Если существует хотя бы один допустимый дележ, то существует и эффективный дележ.*

Доказательство. Согласно лемме Цорна, если для каждого вполне упорядоченного отношением $\precsim_A$ подмножества M множества $\mathbf{F}$ существует такой $f^* \in \mathbf{F}$, что для каждого $f \in M$ $f \precsim_A f^*$, то в множестве существует максимальный элемент по отношению $\precsim_A$. Итак, пусть M – вполне упорядоченное подмножество множества $\mathbf{F}$.

Покажем теперь, что либо в M существует наибольший элемент, либо в M существует такая последовательность (f_n), что $f_n \precsim_A f_{n+1}$ $(n = 1, \ldots)$, и для каждого $f \in M$ существует такое целое $\bar{n}$, что $f \precsim_A f_{\bar{n}}$. Для того чтобы доказать существование такой последовательности (f_n), достаточно показать, что существует неубывающая функция v: $(M, \precsim_A) \to \mathbf{R}$. Такая функция v задается, например, равенством

$$v(f) := \int_A u(E(\cdot), f(\cdot))\, d\nu,$$

где функция $u: \mathscr{P}^* \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$ измерима и $u(\precsim, \cdot)$ есть функция полезности для отношения $\precsim$ (см. задачу 7, § 1.2).

Из определения совокупности $\mathscr{X}$ множеств потребления (§ 1.1) с очевидностью следует, что последовательность (f_n) равномерно ограничена снизу и, следовательно, ограничена снизу последовательность $\int f_n$. Так как f_n является допустимым дележом, существует такой вектор $z_n \geqq 0$, что

$$z_n + \int f_n \in (\mathbf{R}^l_+ + \int X) \cap (e + Y).$$

Но, согласно C.II, (10), это пересечение является ограниченным множеством, потому что

$$(\mathbf{R}^l_+ + \int X) \cap \mathrm{AA}(e + Y) = \mathbf{R}^l_+ \cap \mathrm{AA}Y = \{0\}.$$

Следовательно, последовательность $\int f_n$ ограничена также и сверху. Поэтому мы можем предположить, что существует $\lim\limits_n \int f_n$. По лемме Фату в многомерном пространстве (лемма 3, D.II.4) существует такая функция f^*: $A \to \mathbf{R}^l$, что почти везде в A

$$f^*(a) \in \mathrm{Ls}(f_n(a)), \qquad \int f^* \leqq \lim \int f_n.$$

Так как производственное множество Y замкнуто, $f^* \in \mathbf{F}$. Легко проверить, используя часть (b) теоремы 1, § 1.2, что для каждой f_n

$$f_n \precsim_A f^*.$$

Следовательно, f^* является верхней границей для множества M. Доказательство завершено.

Равновесие по Парето.

Определение 5. Дележ f в экономике (E, e, Y) называется *дележом Парето*, если существуют такие вектор цен $p \in \mathbf{R}^l$, $p \neq 0$, и план производства $y \in Y$, что:

(a) почти везде в A $f(a)$ есть максимальный элемент по отношению $\succ_a$ в множестве $\{x \in X(a) | p \cdot x \leqq p \cdot f(a)\}$;

(b) $\int f d\nu \leqq \int e d\nu + y$;

(c) $p \cdot y = \max p \cdot y$.

Тройка (f, y, p) называется *равновесием по Парето.*

Если в определении 5 условие (a) заменить на более слабое:

(a′) почти везде в A $f(a)$ есть максимальный элемент по отношению $\succ_a$ в множестве

$\{x \in X(a) | p \cdot x \leqq p \cdot f(a)\}$

при условии, что $\inf p \cdot X(a) < p \cdot f(a)$, то f называется *квазипаретовским дележом.*

Легко показать, что имеет место следующий результат.

Утверждение 3. *Если в экономике (E, e, Y) отношение предпочтения почти каждого участника является ненасыщенным, то каждый дележ эффективен по Парето.*

Теорема 4. *Пусть экономика (E, e, Y) такова, что:*

(α) E: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P}^*_{\text{ins}}$ *выпукло (т.е. на атомах отношения предпочтений выпуклы)*;

(β) Y *выпукло.*

Тогда каждый эффективный дележ является квазипаретовским.

Доказательство. Пусть f — эффективный делёж. Положим для каждого $a \in A$

$\psi(a) := \{x \in X(a) | x \succ_a f(a)\}$.

Как и при доказательстве теоремы 1, § 2.2, можно показать, что отображение ψ имеет измеримый график и $\mathcal{L}_\psi \neq 0$. Так как отношения предпочтений локально ненасыщенны, а на атомах измеримого пространства участников к тому же и выпуклы, из теоремы 3, D.II.4 следует, что $\int \psi$ — выпуклое подмножество $\mathbf{R}^l$. Так как f эффективен, ясно, что $e \notin \int \psi - Y$. Следовательно, по теореме отделимости [C.II, (11)] существует такой вектор $p \in \mathbf{R}^l$, $p \neq 0$, что

$p \cdot e \leqq \inf \{p \cdot x | x \in \int \psi\} + \inf p \cdot (-Y)$.

Так как для некоторого $\bar{y} \in Y$ $\int f \leqslant e + \bar{y}$, из предложения 6, D.II.4 следует, что

$\int p \cdot f - p \cdot \bar{y} \leqq \int \inf p \cdot \psi + \inf p \cdot (-Y)$.

Ввиду того что $\bar{y} \in Y$ и $p \cdot f(a) \geqq \inf p \cdot \psi(a)$, почти везде в A имеем равенства $p \cdot f(a) = \inf p \cdot \psi(a)$ и $p \cdot \bar{y} = \max p \cdot Y$.

Таким образом, почти везде в A выполняется условие: если существует такой вектор $x \in X(a)$, что $p \cdot x < p \cdot f(a)$, то $f(a) \succsim_a x$. Так как множество потребления выпукло, каждый $x \in X(a)$, для которого $p \cdot x = p \cdot f(a)$, представим в этом случае как предел последовательности $x_n \in X(a)$, для которой $p \cdot x_n < p \cdot f(a)$. Итак, мы получили свойство (a′) определения квазипаретовского дележа. Доказательство завершено.

Примечания к § 4.3

Понятие "эффективный дележ" и объяснение роли цен в его формировании обычно приписываются Вильфредо Парето (1848–1923). "Эффективный дележ" (этот термин предложен Эрроу и Ханом (1971)) часто называется оптимумом Парето. Имеется обширная литература, посвященная проблеме оптимума и связанным с ним вопросам. Мы упомянем только две обзорных статьи: Бергсона (1948) и Боулдинга (1952).

Строгое изучение проблемы эффективности, использующее свойства выпуклых множеств, было предпринято Купмансом (1951), Эрроу (1951) и Дебре (1951, 1954, 1959). Доказательство теоремы 3 было предложено автору при устном обсуждении Шмайдлером. Теорема 4 взята из работы Гильденбранда (1969).

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

В списке приведены только обозначения, используемые на протяжении всей книги в некотором конкретном смысле.

∂A граница множества A

$\bar{A}$ или $\mathrm{cl}\,A$ замыкание множества A

$|A|$ мощность множества A

$B_\epsilon(x)$ замкнутый шар с центром в x радиуса ϵ

$\mathrm{conv}\,A$ выпуклая оболочка множества A

$\mathrm{diam}\,F$ диаметр F

$\mathrm{dist}(x, F)$ расстояние между x и F

$S(E, F)$ расстояние по Хаусдорфу

$\mathcal{F}(M)$ или $\mathcal{F}$ семейство всех замкнутых подмножеств M

$\mathcal{F}_0(M)$ или $\mathcal{F}_0$ семейство всех непустых замкнутых подмножеств M

$\mathrm{int}\,G$ или $\mathring{G}$ или $\underline{G}$ внутренность множества G

$\mathrm{Li}(F_n)$ нижний топологический предел

$\mathrm{Ls}(F_n)$ верхний топологический предел

(M, d) метрическое пространство

$M \cup \{\infty\}$ одноточечная компактификация

п.н.сн. полунепрерывность снизу

п.н.св. полунепрерывность сверху

$\mathcal{P}$ пространство предпочтений

$\mathcal{P}^*$ пространство отношений предпочтения – безразличия

$\mathcal{P}^*_{co}$ пространство выпуклых отношений предпочтения – безраличия

$\mathcal{P}_{mo}$ пространство монотонных отношений предпочтения

$\mathcal{P}^*_{sco}$ пространство строго выпуклых отношений предпочтения – безразличия

$\mathcal{P}_{lns}$ пространство локально ненасыщенных предпочтений

$(X, \succ)$ отношение предпочтения $\succ$ на пространстве потребления X

$\precsim$ отношение предпочтения – безразличия

$\sim$ отношение безразличия

$\rho(\mu, \nu)$ метрика Прохорова

$\mathcal{T}_c$ топология замкнутой сходимости

$\leqq, \leqslant, <$ неравенства для векторов

R множество всех вещественных чисел

R^m m-мерное евклидово пространство

R^m_+ (R^m_-) положительный (отрицательный) ортант в R^m

1_h единичный h-вектор

$(\delta) = (\delta, \ldots, \delta)$

$|\cdot|$ "суммарная" метрика

$\|\cdot\|$ евклидова метрика

$\mathcal{A}$ σ-алгебра

$\mathcal{A}_\nu$ полная σ-алгебра по отношению к ν

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ σ-алгебра – произведение $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$

$\mathcal{B}(T)$ борелевская σ-алгебра над Γ

$\mathcal{B}^m = \mathcal{B}(R^m)$

$\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ множество всех интегрируемых функций над Ω

$\mathcal{L}_\varphi$ множество интегрируемых селекторов

$\mathrm{supp}(\mu)$ носитель меры μ

$(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ пространство с мерой

$(A, \mathcal{A}, \nu)$ пространство экономических агентов с мерой

$\beta(X, w, p)$ бюджетное множество

$C(\mathcal{E})$ c-ядро экономики обмена $\mathcal{E}$

$C(\mathcal{E}, Y)$ c-ядро коалиционной производственной экономики $(\mathcal{E}, Y)$

(E, e, Y) экономика с собственностью

$\mathcal{E}: (A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P} \times \mathrm{R}^l$ экономика обмена

$(\mathcal{E}, Y)$ коалиционная производственная экономика

$\varphi(X, \succ, w, p)$ множество спроса

$\Pi(\mathcal{E})$ равновесные цены экономики $\mathcal{E}$

$\Pi(\mu)$ равновесные цены для распределения μ

$\mathrm{W}(\mathcal{E})$ множество всех вальрасовских дележей экономики $\mathcal{E}$

$\mathrm{W}(\mu)$ множество всех вальрасовских дележей для распределения μ

$D\mathrm{W}(\mu)$ множество всех вальрасовских равновесных распределений для распределения μ

$Z(\mathcal{E}, p)$ среднее превышение спроса в $\mathcal{E}$ при данном p

s: $(A, \mathcal{A}, \nu) \to \mathcal{P} \times \mathrm{R}$ сектор потребления

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

A f r i a t S.N., 1967 [Африат].
The construction of utility functions from expenditure data. – International Economic Review, 8, p. 67–77.
A l l e n R.G.D., B o w l e y A.L., 1935. [Аллен, Боули].
Family Expenditure: A Study of its Variation. – London: Staples Press.
A r r o w K.J., 1951 [Эрроу].
An extension of the basic theorems of classical welfare economics. – In: J. Neyman, ed. Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley, University of California Press, p. 507–532.
A r r o w K.J., 1953 [Эрроу].
Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques. – Colloque Internationaux du C.N.R.S., 40, p. 41–48.
A r r o w K.J., D e b r e u G., 1954 [Эрроу, Дебре].
Existence of equilibrium for a competitive economy. – Econometrica, 22, p. 265–290.
A r r o w K.J., H a h n F.H., 1971 [Эрроу, Хан].
General Competitive Analysis. – San Francisco: Holden–Day.
A r t s t e i n Z., 1972 [Артстейн].
Set valued measures. – Trans. Amer. Math. Society, 1965, p. 103–121.
A u m a n n R.J., 1964 [Ауман].
Markets with a continuum of traders. – Econometrica, 32, p. 39–50.[Р у с. п е р.: Ауман Р. Рынки с континуумом участников. – В кн.: Математическая экономика. Сб. переводов. М.: Мир, 1974. – с. 64–78.]
A u m a n n R.J., 1965 [Ауман].
Integrals of set–valued functions. – Journ. Math. Anal. and Appl., 12, p. 1–12.
A u m a n n R.J., 1966 [Ауман].
Existence of competitive equilibria in markets with a continuum of traders. – Econometrica, 34, p. 1–17. [Р у с. п е р.: Ауман Р. Существование конкурентных равновесий в рынках с континуумом участников. – В кн.: Математическая экономика. Сб. переводов. – М.: Мир, 1974. – с. 79–100.]
A u m a n n R.J., 1969 [Ауман].
Measurable utility and the measurable choice theorem. – La Décision, Colloque Internationaux du C.N.R.S., Paris, p. 15–26.
B a t o r F.M., 1961 [Батор].
Convexity, efficiency and markets. – Journal of Political Economy, 69, p. 480–483.
B e r g e C., 1966 [Берж].
Espaces Topologiques. – Paris: Dunod (2[e] édition).
B e r g s o n A., 1948 [Бергсон].
Socialist economics. – In: H.S. Ellis, ed. A Survey of Contemporary Economics. Philadelphia, Blakiston, p. 412–448.
B e w l e y T., 1972 [Бьюли].
Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities. – Journal of Economic Theory, 4, p. 514–540.
B e w l e y T., 1973 [Бьюли].
An equivalence theorem with infinitely many commodities. – The International Economic Review.

B e w l e y T., 1974 [Бьюли].
Edgeworth's conjecture. – Econometrica, 41, p. 415–452.
B i l l i n g s l e y P., 1968 [Биллингсли].
Convergence of Probability Measures. – New York: John Wiley and Sons. [Р у с. п е р.: Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 351 с.]
B ö h m V., 1972 [Бём].
Stable firm structures and the core of an economy with production. Working Paper CP 345. – Berkeley: University of California.
B ö h m V., 1973 [Бём].
On cores and equilibria of productive economies with a measure space of consumers. – Journal of Economic Theory, 6, p. 409–412.
B o u l d i n g K., 1952 [Боулдинг].
Welfare economies. – In: B.F. Haley, ed. A Survey of Contemporary Economics. Homewood, 111., Irwin, 2, p. 1–38.
B o w e n R., 1968 [Боуэн].
A new proof of a theorem in utility theory. – International Economic Review, 9, p. 374.
B r o w n D.F., R o b i n s o n A., 1972 [Браун, Робинсон].
A limit theorem on the cores of large standard exhange economies. – Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A., 69, p. 1258–1260, Correction, 69, p. 3068.
B r o w n D.E., R o b i n s o n A., 1974. [Браун, Робинсон].
Non–standard exchange economies. – Econometrica.
C h a m p s a u r P., 1972 [Шамсор].
Note sur le noyau d'une économie avec production. – Paris: D.P. INSEE.
C h i p m a n J.S., H u r w i c z L., R i c h t e r M.K., S o n n e n s c h e i n H.F., ed., 1971 [Чипмэн, Гурвиц, Рихтер, Зонненшайн].
Preferences, Utility, and Demand. New York: Harcourt Brace Jovanovich.
C h o q u e t G., 1947 [Шоке].
Convergences. – Ann. Univ. Grenoble, 23, p. 55–112.
C h o q u e t G., 1966 [Шоке].
Topology. – New York: Academic Press.
C o r n w a l l R., 1969 [Корнуэлл].
The use of prices to characterize the core of an economy. – Journal of Economic Theory, 1, p. 353–373.
D a v i s M., 1961 [Дэвис].
Symmetric solutions to symmetric games with a continuum of players Recent Advances in Game Theory. Proceedings of Conference at Princeton University. – Princeton: Princeton University Press.
D e b r e u G., 1951 [Дебре].
The coefficient of resource utilization. – Econometrica, 19, p. 273–292.
D e b r e u G., 1952 [Дебре].
A social equilibrium existence theorem. – Proceedings of the National Academy of Sciences of U.S.A., 38, p. 886–893.
D e b r e u G., 1953 [Дебре].
The continuity of multi–valued functions in economics. – Cowles Commission Discussion Paper, Economics, 2079.
D e b r e u G., 1954a [Дебре].
Representation of a preference ordering by a numerical function. – In: R.M. Thrall, C.H. Coombs, R.C. Davis, ed. Decision Processes. New York: John Wiley and Sons.
D e b r e u G., 1954b [Дебре].
Valuation equilibrium and Pareto optimum. – Proceedings of the National Academy of Sciences of U.S.A., 40, p. 588–592.
D e b r e u G., 1956 [Дебре].
Market equilibrium. – Proceedings of the National Academy of Sciences of U.S.A., 42, p. 876–878.
D e b r e u G., 1959 [Дебре].
Theory of Value. – New York: John Wiley and Sons.
D e b r e u G., 1962 [Дебре].
New concepts and techniques for equilibrium analysis. – International Economic Review,

3, p. 257–273.
D e b r e u G., 1963 [Дебре].
On a theorem of Scarf. – Review of Economic Studies, 30, p. 177–180.
D e b r e u G., 1964 [Дебре].
Continuity properties of Paretian utility. – International Economic Review, 5, p. 285–293.
D e b r e u G., 1967a [Дебре].
Integration of correspondences. – In: L. LeCam, J. Neyman, E.L. Scott, ed. – Proc. Fifth Berkeley Symposium Math. Stat. and Probability, II, Part 1, Berkeley: University of California Press, p. 351–372.
D e b r e u G., 1967b [Дебре].
Preference function on measure spaces of economic agents. – Econometrica, 35, p. 111–122.
D e b r e u G., 1969 [Дебре].
Neighboring economic agents. – La Décision, C.N.R.S., Paris, p. 85–90.
D e b r e u G., 1970 [Дебре].
Economies with a finite set of equilibria. – Econometrica, 38, p. 387–392.
D e b r e u G., 1972 [Дебре].
Smooth preferences. – Econometrica, 40, p. 603–615.
D e b r e u G., S c a r f H., 1963 [Дебре, Скарф].
A limit theorem on the core of an economy. – International Economic Review, 4, p. 235–246.
D e b r e u G., S c a r f H., 1972 [Дебре, Скарф].
The limit of the core of an economy. – In: C.B. McGuire, R. Radner, ed. Decision and Organization, Amsterdam: North–Holland.
D e b r e u G., S c h m e i d l e r D., 1972 [Дебре, Шмайдлер].
The Radon–Nikodym derivative of a correspondence. – In: L.LeCam, J.Neyman, E.L.Scott, ed. Proc. Sixth Berkeley Symposium Math. Stat, and Probability, Berkeley: University of California Press, p. 41–56.
D e l b a e n F., 1971 [Делбейн].
Lower and upper hemi–continuity of the Walras correspondence. – Doctoral Dissertation, Free University of Brussels.
D i e u d o n n é J., 1960 [Дьедонне].
Foundations of Modern Analysis. – New York: Academic Press. [Р у с. п е р.: Дьедонне Дж. Основы современного анализа. – М.: Мир, 1964. – 430 с.]
D i e r k e r E., 1972 [Диркер].
Two Remarks on the Number of Equilibria of an Economy. – Econometrica, 40, p. 951–953.
D i e r k e r E., 1974 [Диркер].
Topological methods in Walrasian economics. – Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 92, Berlin: Springer.
D i e r k e r E., D i e r k e r H., 1972 [Диркер, Диркер].
The local uniqueness of equilibria, Econometrica, 40, p. 867–881.
D r é z e J.H., G e p t s S., G a b s z e w i c z J., 1969 [Дрез, Джептс, Габшевич].
On cores and competitive equilibria. – In: La Décision. – C.N.R.S., Paris, p. 91–114.
D u d l e y R.M., 1968 [Дадли].
Distances of probability measures and random variables. – In: The Annals of Mathematical Statistics, 39, p. 1563–1572.
D u n f o r d N., S c h w a r t z J., 1958 [Данфорд, Шварц].
Linear Operators. – New York: Interscience. [Р у с. п е р.: Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИЛ, 1962. – 895 с.]
E d g e w o r t h F.Y., 1881 [Эджворт].
Mathematical Psychics. – London: P. Kegan.
E f f r o s E.G., 1965 [Эффрос].
Convergence of closed subsets in a topological space. – Proceedings of the American Mathematical Society, 16, p. 929–931.
E i l e n b e r g S., 1941 [Эйленберг].
Ordered topological spaces. – American Journal of Mathematics, 63, p. 39–45.
F a r r e l l M.J., 1959 [Фаррел].
The convexity assumption in the theory of competitive markets. – Journal of Political Economy, 67, p. 377–391.

F e l l J.M.G., 1962 [Фелл].
A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space. – Proceedings of the American Mathematical Society, 13, p. 472–476.
F l a c h s m e y e r J., 1964 [Флаксмейер].
Verschiedene Topologisierungen im Raum der abgeschlossenen Mengen. – Math. Nachr. 26, p. 321–337.
F o r t M.K., 1949 [Форт].
An unified theory of semi–continuity. – Duke Math. J., 16, p. 237–246.
F u c h s G., 1974 [Фукс].
Private ownership economies with a finite number of equilibria. – Journal of Mathematical Economics, 1.
G a b s z e w i c z J., 1970 [Габшевич].
Théories des noyaus et de la concurrence imperfaite. – Recherches Economiques de Louvain, 36 (1), p. 21–37.
G a b s z e w i c z J., M e r t e n s J.F., 1971 [Габшевич, Мертенс].
An equivalence theorem for the core of an economy whose atoms are not "too" big. – Econometrica, 39, 713–721.
G a b s z e w i c z J., D r è z e J.H., 1971 [Габшевич, Дрез].
Syndicates of traders in an exchange economy. – In: H.W. Kuhn, Szegö G.P., eds. Differential Games and Related Topics. Amsterdam: North–Holland, p. 399–414.
G a l e D., 1955 [Гейл].
The law of supply and demand. – Mathematica Scandinavica, 3, p. 155–169.
G r e e n J.R., 1972 [Грин].
On the inequitable nature of core allocations. – Journal of Economic Theory, 4, p. 132–143.
G r o d a l B., 1970 [Гродал].
Approximation of convex preference relations by strongly convex preference relations. – University of Copenhagen, Institute of Economics. (Не опубликовано.)
G r o d a l B., 1971 [Гродал].
A theorem on correspondences and continuity of the core. – In: H.W. Kuhn, Szegö G.P., eds. – Differential Games and Related Topics. Amsterdam: North–Holland.
G r o d a l B., 1972 [Гродал].
A second remark on the core of an atomless economy. – Econometrica, 40, p. 581–583.
H a r d y G.M., W r i g h t E.M., 1960 [Харди, Райт].
Introduction to the Theory of Numbers. – Oxford: Oxford University Press, 4th Edition.
H a r t S., K o h l b e r g E., 1974 [Харт, Кольберг].
Equally distributed correspondences. – Journal of Mathematical Economics, 1.
H a u s d o r f f F., 1962 [Хаусдорф].
Set Theory. – New York: Chelsea.
H i l d e n b r a n d W., 1972 [Гильденбранд].
Continuity of the equilibrium–set correspondence. – Journal of Economic Theory, 5, p. 152–162.
H i l d e n b r a n d W., 1968 [Гильденбранд].
The core of an economy with a measure space of economic agents. – The Review of Economic Studies, 35, p. 443–452.
H i l d e n b r a n d W., 1969 [Гильденбранд].
Pareto optimality for a measure space of economic agents. – International Economic Review, 10, p. 363–372.
H i l d e n b r a n d W., 1970a [Гильденбранд].
On economies with many agents. – Journal of Economic Theory, 2, p. 161–188.
H i l d e n b r a n d W., 1970b [Гильденбранд].
Existence of equilibria for economies with production and a measure space of consumers. – Econometrica, 38, p. 608–623.
H i l d e n b r a n d W., 1971 [Гильденбранд].
Random preferences and equilibrium analysis. – Journal of Economic Theory, 4, p. 414–429.
H i l d e n b r a n d W., 1972 [Гильденбранд].
Measure spaces of economic agents. – In: L.LeCam, J.Neyman, E.L.Scott, eds. – Proc.

Sixth Berkeley Symposium Math. Stat. and Probability, Berkeley: University of California Press, p. 41–56.
H i l d e n b r a n d W., M e r t e n s J.F., 1971 [Гильденбранд, Мертенс].
On Fatou's lemma in several dimensions. – Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 17, p. 151–155.
H i l d e n b r a n d W., M e r t e n s J.F., 1972 [Гильденбранд, Мертенс].
Upper hemi-continuity of the equilibrium-set correspondence for pure exchange economies. – Econometrica, 40, p. 99–108.
H i l d e n b r a n d W., K i r m a n A.P., 1973 [Гильденбранд, Кирмэн].
Size removes inequity. – The Review of Economic Studies, 30, p. 305–314.
H i l d e n b r a n d W., S c h m e i d l e r D., Z a m i r S., 1974 [Гильденбранд, Шмайдлер, Замир].
Existence of approximate equilibria and cores. – Econometrica.
H o u t h a k k e r H.S., 1950 [Хаутеккер].
Revealed preference and the utility function. – Economica, 17, p. 159–174.
H o u t h a k k e r H.S., 1955 [Хаутеккер].
The Pareto distribution and the Cobb-Douglas production function in activity analysis. – The Review of Economic Studies, 23, p. 27–31.
K a n n a i Y., 1970 [Каннаи].
Continuity properties of the core of a market. – Econometrica, 38, p. 791–815.
K a n n a i Y., 1972 [Каннаи].
Continuity properties of the core of a market: a correction. – Econometrica, 40, p. 955–958.
K a n n a i Y., 1974 [Каннаи].
Approximation of convex preferences. – Journal of Mathematical Economics, 1.
K e l l e y J.L., 1955 [Келли].
General Topology. – Princeton: van Nostrand. [Р у с. п е р.: Келли Дж. Общая топология. 2-е изд. – М.: Наука, 1981. – 431 с.]
K h a n M.A., 1973 [Хан].
Some equivalence theorems. – The Review of Economic Studies.
K o o p m a n n s T.C., 1951 [Купманс].
Analysis of production as an efficient combination of activities. – In: T.C. Koopmanns, ed. – Activity Analysis of Production and Allocation, New York: John Wiley and Sons, p. 33–97.
K o o p m a n n s T.C., 1961 [Купманс].
Convexity assumptions, allocative efficiency, and competitive equilibrium. – Journal of Political Economy, 69, p. 478–479.
K u d o H., 1954 [Кудо].
Dependent experiments of sufficient statistics. – Nat. Sci. Ochanomizu, Tokyo, 4, p. 151–163.
K u r a t o w s k i C., 1958 [Куратовский].
Topologie I, II, 4th edn., – Warsaw. [Р у с. п е р.: Куратовский К. Топология. – М.: Мир. – Т. 1, 1966. – 594 с.; Т. 2, 1969. – 624 с.]
K u r a t o w s k i C., R y l l–N a r d z e w s k i C., 1965 [Куратовский, Рылл-Нарджевский].
A general theorem on selectors. – Bull. Polish Acad. Sci., 13, p. 397.
L a n d e r s D., 1968 [Ландерс].
Existenz und Konsistenz von Maximum Likelihood Schätzern. – Thesis: University of Cologne.
L i n d e n s t r a u s s J., 1966 [Линденштраус].
A short proof of Liapunov's convexity theorem. – Jour. of Math. and Mech., 15, p. 971–972.
L o è v e M., 1963 [Лоэв].
Probability Theory. – Princeton: Van Nostrand. [Р у с. п е р.: Лоэв М. Теория вероятностей. – М.: ИЛ, 1962. – 719 с.]
L u c e R.D., T u c k e r A.W., eds., 1959 [Льюс, Таккер].
Contributions to the theory of games IV, Annals of Mathematical Studies 40, Princeton: Princeton University Press.
M a r s c h a k J., 1950 [Маршак].
Rational behavior, uncertain prospects, and measurable utility. – Econometrica, 18, p. 111–141.

Marczewski E., Ryll–Nardzewski C., 1953 [Марчевский, Рылл-Нарджевский].
Projections in abstract sets. – Fund. Math., 40, p. 160–164.
Mas-Colell A., 1974 [Мас-Колелл].
Continuous and smooth consumers. – Journal of Economic Theory.
McKenzie L., 1954 [Мак-Кензи].
On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems. – Econometrica, 22, p. 147–161.
McKenzie L., 1955 [Мак-Кензи].
Competitive equilibrium with dependent consumer preferences, in National Bureau of Standards and Department of the Air Force. – The Second Symposium on Linear Programming, Washington D.C.
McKenzie L., 1959 [Мак-Кензи].
On the existence of general equilibrium for a competitive market. – Econometrica, 27, p. 54–71.
Mertens J.F., 1970 [Мертенс].
Upper semi-continuity of the Walras-correspondence, a probabilistic proof. – CORE Discussion Paper 7003.
Meyer P.A., 1966 [Мейер].
Probability and Potentials. – Blaisdell Publishing Company, Waltham, Toronto, London. [Рус. пер.: Мейер П. Вероятность и потенциалы. – М.: Мир, 1973. – 324 с.]
Milnor J., Shapley L.S., 1961 [Милнор, Шепли].
Values of large games II: Oceanic games. – RAND Corporation, RM-2699.
Mitjagin B.S., 1972 [Митягин].
Заметки по математической экономике. – УМН, 27, № 3, с. 3–19.
Mrowka S., 1958 [Мрувка].
On the convergence of nets of sets. – Fund. Math., 45, p. 237–246.
Mrowka S., 1970 [Мрувка].
Some comments on the space of subsets, in Set-Valued Mappings, Selections and Topological Properties of 2^X. – Lecture Notes in Mathematics, 171, Berlin: Springer.
Neuefeind W., 1972 [Нойефайнд].
On continuous utility. – Journal of Economic Theory, 5, p. 174–176.
Neumann J., von, 1949 [фон Нейман].
On rings of operators, reduction theory. – Annals of Mathematics, 50, p. 401–485.
Neveu J., 1965 [Неве].
Mathematical Foundations of the Calculus of Probability. – San Francisco: Holden-Day. [Рус. пер.: Неве Дж. Математические основы теории вероятностей. – М.: Мир, 1969. – 309 с.]
Nikaidô H., 1956 [Никайдо].
On the classical multilateral exchange problem. – Metroeconomica, 8, p. 135–145.
Nikaidô H., 1968 [Никайдо].
Convex Structures and Economic Theory. – New York: Academic Press. [Рус. пер.: Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972. – 517 с.]
Nishino H., 1971 [Нишино].
On the occurrence and the existence of competitive equilibria. – Keio Economic Studies, 8, № 2, p. 33–67.
Novikoff P., 1939 [Новиков].
О проекциях некоторых B-множеств. – ДАН, 23, № 9, с. 864–865.
Oddou C., 1972 [Одду].
Coalition production economies with productive factors. – CORE Discussion Paper, 7231.
Parthasarathy K.R., 1967 [Партхасаратхи].
Probability Measures on Metric Spaces. – New York: Academic Press.
Peleg B., 1963 [Пелег].
Solutions to cooperative games without side payments. – Trans. Amer. Math. Soc., 106, p. 280–292.
Rader Y.T., 1963 [Радер].
The existence of a utility function to represent preferences. – The Review of Economic Studies, 30, p. 229–232.

R a d e r Y.T., 1973 [Радер].
Nice demand functions. – Econometrica, 41, № 5, p. 913–935.
R i c h t e r H., 1963 [Рихтер].
Verallgemeinerung eines in der Statistik benötigten Satzes der Masstheorie. – Math. Annalen, 150, p. 85–90, Beweisergänzung, p. 440–441.
R i c h t e r M.K., 1966 [Рихтер].
Revealed preference theory. – Econometrica, 34, p. 635–645.
R i c h t e r M.K., 1971 [Рихтер].
Coalition Core and Competition. – Journal of Economic Theory, 3, p. 323–334.
R o c k a f e l l a r R.T., 1969 [Рокафеллар].
Measurable dependence of convex sets and functions on parameters. – J. Math. Anal. and Appl., 28, p. 4–25.
R o c k a f e l l a r R.T., 1970 [Рокафеллар].
Convex Analysis. – Princeton: Princeton University Press. [Р у с. п е р.: Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 469 с.]
R o t h e n b e r g J., 1960 [Ротенберг].
Non-convexity, aggregation, and Pareto optimality. – Journal of Political Economy, 68, p. 435–468.
R o y d e n H.L., 1963 [Ройден].
Real Analysis. London: The Macmillan Company.
S a k s S., 1937 [Сакс].
Theory of the Integral. – New York: Wafer Publishing Company. [Р у с. п е р.: Сакс С. Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949. – 495 с.]
S a m u e l s o n P.A., 1938 [Самуэльсон].
A note on the pure theory of consumer's behavior. – Economica, 5, pp. 61–71, 353–354.
S a r d A., 1942 [Сард].
The measure of the critical values of differentiable maps. – Bill. Amer. Math. Soc., 48, p. 883–890.
S c a r f H., 1963a [Скарф].
Notes on the core of a production economy.
S c a r f H., 1963b [Скарф].
An outline of some results on production and the core. (Не опубликовано.)
S c a r f H., 1967 [Скарф].
The core of an *n*-person game. – Econometrica, 35, p. 50–69.
S c h m e i d l e r D., 1969 [Шмайдлер].
Competitive equilibria in markets with a continuum of traders and incomplete preferences. – Econometrica, 37, p. 578–585.
S c h m e i d l e r D., 1970 [Шмайдлер].
Fatou's lemma in several dimensions. – Proceedings of the Americal Mathematical Society, 24, p. 300–306.
S c h m e i d l e r D., 1971 [Шмайдлер].
A condition for the completeness of partial preference relations. – Econometrica, 39, p. 403–404.
S c h m e i d l e r D., 1972 [Шмайдлер].
A remark on the core of an atomless economy. – Econometrica, 40, p. 579–580.
S c h w a r t z L., 1967 [Шварц].
Cours d'Analyse I. – Paris: Hermann. [Р у с. п е р.: Шварц Л. Анализ, т. 1. – М.: Мир, 1973. – 824 с.]
S h a p l e y L.S., 1953 [Шепли].
Stochastic games. – Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A., 39, p. 327–332.
S h a p l e y L.S., 1959 [Шепли].
The solutions of a symmetric market game. – In: R.D.Luce, Tucker A.W., eds. – Contributions to the Theory of Games IV, Annals of Mathematical Studies, 40, p. 145–162, Princeton: Princeton University Press.
S h a p l e y L.S., 1964 [Шепли].
Values of large games, VII: a general exchange economy with money. The RAND Corporation, RM–4248–PR.
S h a p l e y L.S., 1972a [Шепли].
On balanced games without side payments. – The RAND Corporation, P–4910.

S h a p l e y L.S., 1972b [Шепли].
Let's block "block". – The RAND Corporation, P–4779.
S h a p l e y L.S., S h a p i r o, 1960 [Шепли, Шапиро].
Values of large games, I: a limit theorem. – The RAND Corporation, RM–2648–PR, 19 p.
S h a p l e y L.S., S h u b i k M., 1966 [Шепли, Шубик].
Quasi-cores in a monetary economy with non-convex preferences. – Econometrica, 34, p. 805–827.
S h a p l e y L.S., S h u b i k M., 1967 [Шепли, Шубик].
Concepts and theories of pure competition. – In: M. Shubik, ed. – Essays in Mathematical Economics. Princeton: Princeton University Press.
S h a p e l y L.S., S h u b i k M., 1969a [Шепли, Шубик].
On Market Games. – Cowles Foundation Paper, 295.
S h a p l e y L.S., S h u b i k M., 1969b [Шепли, Шубик].
Pure competition, coalitional power, and fair division. – International Economic Review, 10, p. 337–361.
S h i t o v i t z B., 1974 [Шитовиц].
Oligopoly in Markets with a Continuum of Traders. – Econometrica, 41, p. 467–501.
S h u b i k M., 1959 [Шубик],
Edgeworth Market Games. – In: R.D. Luce, A.W. Tucker, eds. Contributions to the Theory of Games, IV, Annals of Mathematical Studies, 40. – Princeton: Princeton University Press, p. 267–278.
S i o n M., 1960 [Сайон].
On uniformization of sets in topological spaces. – Transactions Amer. Math. Soc., 96, p. 237–245.
S k o r o k h o d A.V., 1965 [Скороход].
Studies in the theory of random processes. – Reading, Massachusetss: Addison–Wesley Publishing Company.
S m a l e S., 1973 [Смейл].
Global Analysis and Economics I "Pareto optimasm and a generalization of Morse theory." – In: Dynamical Svstems. New York: Academic Press.
S m a l e S., 1972 [Смейл].
Global analysis and economics II, mimeographed. – Department of Mathematics, University of California, Berkeley.
S m a l e S., 1974 [Смейл].
Global analysis and economics, II A: Extension of a theorem of Debreu. – Journal of Mathematical Economics, 1, p. 1–14.
S o n d e r m a n n D., 1974 [Зондерманн].
Economics of scale and equilibria in coalition production economies. – Journal of Economic Theory.
S t a r r R., 1969 [Старр].
Quasi-equilibria in markets with non-convex preferences. – Econometrica, 37, p. 25–38.
S t i g l e r G.J., 1957 [Стиглер].
Perfect competition, historically contemplated. – J. Polit. Econ., 65, p. 1–17.
T r o c k e l W., 1974 [Токел].
Limit theorem on the core. – Working Paper IP–201 University of California, Berkeley.
U z a w a H., 1957 [Удзава].
Note on preference and axioms of choice. – Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 8, p. 35–40.
U z a w a H., 1960 [Удзава].
Preference and rational choice in the theory of consumption. – In: K. J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes, eds. Mathematical Methods of the Social Sciences. – Stanford: Stanford University Press, p. 129–148.
V i l l e J., 1946 [Вилль].
Sur les conditions d'existence d'une ophélimité totale et d'un indice de niveau de prix. – Annales de l'Université de Lyon, 9, Sec. A (3), p. 32–39.
V i n d K., 1964 [Винд].
Edgeworth-allocations in an exchange economy with many traders. – International Economic Review, 5, p. 165–177.

V i n d K., 1965 [Винд].
A theorem on the core of an economy. – The Review of Economic Studies, 32, № 1, p. 47–48.
V i n d K., 1973 [Винд].
A third remark on the core of an atomless economy. – Econometrica, 40, p. 585–586.
W a l d A., 1935 [Вальд].
Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre. – Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums.
W a l d A., 1936 [Вальд].
Über einige Gleichungssusteme der mathematischen Ökonomie. – Zeitschrift für Nationalökonomie, 7, p. 637–670.
W a l r a s L., 1874 [Вальрас].
Eléments d'économie politique pure. – Lausanne: L.Corbaz.
W a t s o n P.D., 1953 [Ватсон].
On the limits of sequences of sets. – Quart. J. Math., 4, p. 1–3.
Y o s i d a K., H e w i t t E., 1952 [Иосида, Хьюит].
Finitely additive measures. – Trans. Amer. Math. Soc., 72, p. 46–66.

Вернер Гильденбранд

**ЯДРО И РАВНОВЕСИЕ
В БОЛЬШОЙ ЭКОНОМИКЕ**

Редактор *Е.Ю.Ходан*
Художественный редактор *Т.Н.Кольченко*
Технические редакторы *С.В. Геворкян, В.Н. Никитина*
Корректор *Т.В. Обод*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 12007

Сдано в набор 07.04.86. Подписано к печати 11.08.86
Формат 60 X 90 1/16. Бумага офсетная
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная
Усл.печ.л. 12,5. Усл.кр.-отт. 12,5. Уч.-изд.л. 14,07
Тираж 2250 экз. Тип. зак. 163 Цена 2 р. 40 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства "Наука"
630077 г. Новосибирск-77, ул.Станиславского, 25

ИЗДАТЕЛЬСТВО "НАУКА"

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

117071 Москва В-71, Ленинский ~~проспект, 15~~

Серия "Экономико-математическая библиотека"

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ

Алексеев О.Г. Комплексное применение методов дискретной оптимизации.
Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.И. Методы невыпуклой оптимизации.
Червинский Р.А. Методы синтеза систем в целевых программах.